Universidad de Granada

Departamento de Análisis Matemático

Problemas de Cálculo

Ejercicios de derivadas

Javier Pérez

Directorio

Actualizado el 26 de enero de 2002 Versión Enero, 2002

Tabla de Contenidos

1. Ejercicios de Derivadas

1.1. Tasas de variación

En los siguientes ejercicios se trata de calcular la tasa de variación de una magnitud cuando se conoce la tasa de variación de otra magnitud relacionada con ella. En este tipo de ejercicios la "tasa de variación" se interpreta como una derivada y, en la mayoría de los casos, basta usar la regla de la cadena para obtener lo que se pide. Hay que elegir las unidades de acuerdo con los datos del problema; por ejemplo, si un volumen se mide en litros tendremos que medir longitudes con decímetros.

Ejercicio 1. ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

Ejercicio 2. Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/sg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.

Ejercicio 3. Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

Ejercicio 4. El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70 cm^3 por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12 cm?

Ejercicio 5. Un barco A se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco B avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto O del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos A y B al punto O son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

Ejercicio 6. Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50 cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15 cm?

1.2. Ejercicios de extremos

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular. Los siguientes consejos pueden ser útiles:

a) Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.

b) Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.

c) Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.

d) Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de f.

e) Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.

Ejercicio 7. Dado un punto $P = (a,b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Ejercicio 8. Demuestra que entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es un cuadrado.

Ejercicio 9. Determinar el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

Ejercicio 10. Calcular el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Ejercicio 11. Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

Ejercicio 12. Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

Ejercicio 13. Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

Ejercicio 14. Encontrar un punto P de la circunferencia $x^2+y^2=1$ con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son (0,0) y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en P con los ejes coordenados tenga área mínima.

Ejercicio 15. Calcula la longitud de la escalera más larga que llevada en posición horizontal puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b.

Ejercicio 16. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse dentro de un semicírculo de radio 2.

Ejercicio 17. Se necesita construir un depósito de acero de 500 m^3, de forma rectangular con base cuadrada y sin tapa. Tu trabajo, como ingeniero de producción, es hallar las dimensiones del depósito para que su costo de producción sea mínimo.

Ejercicio 18. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a>0$).

Ejercicio 19. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura H y radio R conocidos.

Ejercicio 20. Hallar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a>0$).

Ejercicio 21. La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcular las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio R.

Ejercicio 22. Calcular la distancia mínima del punto $(6,3)$ a la parábola de ecuación $y=x^2$.

Ejercicio 23. Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80 euros al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4 euros de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8 euros para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

Ejercicio 24. Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio r y ángulo central θ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de r y θ hacen mínimo el perímetro del jardín?

Ejercicio 25. Se corta un alambre de longitud L formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcular por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

Ejercicio 26. Dados dos puntos A y B situados en el primer cuadrante del plano, dígase cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

Ejercicio 27. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Ejercicio 28. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

Ejercicio 29. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcúlense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Ejercicio 30. Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

Ejercicio 31. Con una cuerda de longitud L, en la que en uno de sus extremos hemos hecho un nudo corredizo, rodeamos una columna circular de radio R haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcular la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

Ejercicio 32. Calcular los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.
2. $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 3]$.
5. $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Ejercicio 33. Calcular el mínimo valor de $\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ donde $a_1, a_2, \cdots a_n$ son números reales dados.

Ejercicio 34. Calcular la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{1/x}$.

1.3. Cálculo de límites

Ejercicio 35. Calcular el límite en el punto a que en cada caso se indica de las siguientes funciones:

$$f(x)=(\operatorname{sen}x+\cos x)^{1/x},\ a=0; \qquad f(x)=(1+\operatorname{tg}x)^{1/x^2},\ a=0$$

$$f(x)=(\cot x)^{\operatorname{sen}x},\ a=0,\pi/2; \qquad f(x)=\left(\cos^2 x+\frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2},\ a=0$$

$$f(x)=(1+\operatorname{sen}x)^{\operatorname{cotg}x},\ a=0,\pi/2; \qquad f(x)=\frac{\log(\operatorname{sen}x)}{(\pi-2x)^2},\ a=\pi/2$$

$$f(x)=\frac{x-\operatorname{arc\,tg}x}{\operatorname{sen}^3 x},\ a=0; \qquad f(x)=\frac{(\operatorname{tg}x)(\operatorname{arc\,tg}x)-x^2}{x^6},\ a=0$$

$$f(x)=\frac{e^x-\cos\sqrt{2}\,x-x}{\operatorname{tg}^3 x},\ a=0; \qquad f(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)},\ a=0$$

Ejercicio 36. Calcular el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{x^2\operatorname{sen}1/x}{\log x},\ a=+\infty; \quad f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x},\ a=+\infty$$

$$f(x)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\ a=0,\ a=+\infty; \quad f(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x+2}\right)^{x^3},\ a=+\infty$$

Ejercicio 37. Calcúlense los límites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right); \ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}; \ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x e^{2x}+x e^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}; \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)^{1/\log x}$$

Sugerencia: pueden usarse las reglas de L'Hôpital pero conviene realizar previamente alguna transformación.

Ejercicio 38. Explicar si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}x}$$

Ejercicio 39. a) Calcular una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\varphi(x)}{x^5}=0.$

b) Calcular una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\operatorname{arc\,tg}(x+1))-\varphi(x)}{x^2}=0.$

1.4. Teorema de Rolle y del valor medio

Ejercicio 40. Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=x^6-3x^2+2$$

Ejercicio 41. Calcular el número de soluciones de la ecuación $3\log x-x=0$.

Ejercicio 42. Sea f una función polinómica y $a<b$. Justifíquese que, *contando cada cero tantas veces como su orden*, si $f(a)f(b)<0$ el número de ceros de f en $]a,b[$ es impar; y si $f(a)f(b)>0$ dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Dedúzcase que si f tiene grado n, es condición necesaria y suficiente para que f tenga n raíces reales distintas que su derivada tenga $n-1$ raíces reales distintas $c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$ y que para $\alpha<c_1$ suficientemente pequeño y para $\beta>c_{n-1}$ suficientemente grande, los signos de los números $f(\alpha), f(c_1), f(c_2),\dots, f(c_{n-1}), f(\beta)$ vayan alternando.
Aplicación:

1. Determinar para qué valores de α la función polinómica $3x^4-8x^3-6x^2+24x+\alpha$ tiene cuatro raíces reales distintas.
2. Estudiar el número de raíces reales de la ecuación $3x^5+5x^3-30x=\alpha$, según los valores de α.

Ejercicio 43. Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $f(x)=(x^2-1)^n \quad (x\in\mathbb{R})$. Pruébese que la derivada k-ésima $(1\leq k\leq n)$ de f tiene exactamente k raíces reales distintas en el intervalo $]-1,1[$.

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes. Por otra parte, algunas de las desigualdades más útiles son consecuencia de la convexidad. Los siguientes ejercicios tratan de ello.

Ejercicio 44. Probar que $-a\,\mathrm{e}\log x\leqslant x^{-a}$ para todo $x>0$ y todo $a\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 45. Dado $\alpha\in]0,1[$ demuéstrese que $x^\alpha<\alpha x+1-\alpha$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$, $x\neq 1$.

Ejercicio 46. Sean $0<a<b$. Pruébese que si $b\leq \mathrm{e}$ entonces $a^b<b^a$, y si $\mathrm{e}\leq a$ entonces $b^a<a^b$. ¿Qué puede decirse si $a<\mathrm{e}<b$?.
Sugerencia: considérese la función $x\mapsto\dfrac{\log x}{x}$.

Ejercicio 47. ¿Hay algún número $a>0$ que verifique que $a^{x/a}\geq x$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$? ¿Cuál es dicho número?

Ejercicio 48. Pruébese que para todo $x\in]0,\pi/2[$ se verifica que

$$\text{i) } 1-\frac{x^2}{2}<\cos x;\quad \text{ii) } \frac{2x}{\pi}<\operatorname{sen} x<x<\operatorname{tg} x$$

Ejercicio 49. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable y f' creciente. Probar que la función $g:]a,b]\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\in]a,b]$ por $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, es creciente.

Ejercicio 50. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable dos veces en $]a,b[$. Supongamos que el segmento de extremos $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ corta a la gráfica de f en un punto $(c,f(c))$ con $a<c<b$. Demuéstrese que existe algún punto $d\in]a,b[$ tal que $f''(d)=0$.
Sugerencia: interpretar gráficamente el enunciado.

1.5. Teorema de Taylor

Ejercicio 51. Justifíquese que las únicas funciones n veces derivables con derivada de orden n constante son las funciones polinómicas de grado $\leqslant n$.

Ejercicio 52. Calcúlese, usando un desarrollo de Taylor conveniente, $\sqrt{2}$ con nueve cifras decimales exactas.
Sugerencia: téngase en cuenta que $\sqrt{2}=\dfrac{14}{10}\left(1-\dfrac{1}{50}\right)^{-1/2}$.

Ejercicio 53. Calcular, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

$$\text{a) } \alpha=\sqrt[3]{7}, \qquad \text{b) } \alpha=\sqrt{e}, \qquad \text{c) } \alpha=\operatorname{sen}(1/2)$$

Ejercicio 54. Calcular los polinomios de Taylor de orden n en el punto 0 de las funciones $\exp x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $(1+x)^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, $\operatorname{arc\,sen} x$.

1.6. Derivabilidad de funciones

Ejercicio 55. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0 siendo, además, $g(0)=0$. Definamos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=g'(0)$. Estúdiese la derivabilidad de f. ¿Es f' continua en 0?

Ejercicio 56. Sean $f,g:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\quad f(0)=1;\quad g(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$$

Calcúlense las derivadas primera y segunda de f y g en 0 y dedúzcase el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e+\dfrac{e}{2}x}{x^2}$$

Ejercicio 57. Estúdiese la derivabilidad de las funciones

1. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^{1/(x^2-1)}$, $f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$
2. $f:]-1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=(x+e^x)^{1/x}$, $f(0)=\mathrm{e}^2$.
3. $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=(1+x\log x)^{1/x}$, $f(0)=0$.
4. $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x^2}$, $f(0)=\mathrm{e}^{-1/6}$.
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\left(2+x^2\right)^{\operatorname{sen}(1/x)}$, $f(0)=1$.

Ejercicio 58. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ para $x\neq 0$, y $f(0)=0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f y calcular su imagen.

Ejercicio 59. Supongamos que f es derivable en a, g es continua en a y $f(a)=0$. Pruébese que fg es derivable en a.

Ejercicio 60. Justifíquese que existe una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable y que verifica que $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcúlese $g'(1)$ y $g'(1+e)$.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

Sea r el radio del cilindro y h la altura medidos en decímetros. Sea $V(t)$ el volumen de agua, medido en litros (=dcm^3), que hay en el cilindro en el tiempo t medido en minutos. La información que nos dan es una tasa de variación

$$V(t+1)-V(t)=-3000 \quad \text{litros por minuto}$$

En este tipo de ejercicios la tasa de variación se interpreta como una derivada: $V'(t)=-3000$. Fíjate que $V(t+t_o)-V(t_o)\approxeq V'(t_o)t$, por lo que la interpretación es razonable. El signo negativo de la derivada es obligado ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante pero la altura del agua depende del tiempo, tenemos

$$V(t)=\pi r^2 h(t)$$

y deducimos

$$V'(t)=-3000=\pi r^2 h'(t)$$

Por tanto

$$h'(t)=-\frac{3000}{\pi r^2} \quad \text{decímetros por minuto}$$

Si expresamos las medidas en metros, entonces $h'(t)=-\dfrac{3}{\pi r^2}$ metros por minuto. ◀

Ejercicio 2.

Sean $(x(t),y(t))$ las coordenadas, medidas en centímetros, del punto P en el instante t medido en segundos. Nos dicen que $y(t)\geqslant 0$ y que $x(t)=y(t)^2$. La distancia del punto P al origen viene dada por $f(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$, por lo que

$$f'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}$$

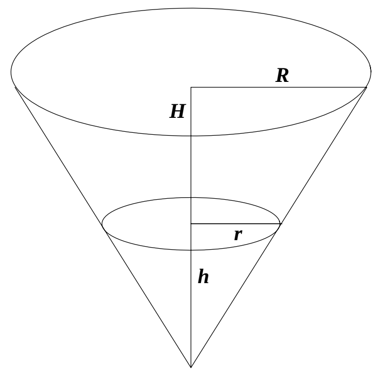
Lo que nos piden es $f'(t_o)$ sabiendo que $x(t_o)=9$. En tal caso ha de ser $y(t_o)=3$. También conocemos $x'(t)=5$ (cm/sg). Con ello es fácil deducir el valor de $y'(t_o)=\dfrac{x'(t_o)}{2y(t_o)}=\dfrac{5}{6}$. Finalmente,

$$f'(t_o)=\frac{x(t_o)x'(t_o)+y(t_o)y'(t_o)}{\sqrt{x(t_o)^2+y(t_o)^2}}=\frac{45+3(5/6)}{81+9}=\frac{95}{6\sqrt{10}} \quad \text{cm/sg}$$

◀

Ejercicio 3.

Expresaremos todas las medidas en metros. Si $V(t)$ es el volumen de agua que hay en el depósito en el tiempo t medido en segundos, nos dicen que $V'(t)=\dfrac{9}{10^3}$ m^3/sg. Sabemos que $V(t)=\dfrac{1}{3}\pi r(t)^2 h(t)$ donde $h(t)$ es la altura, medida desde el vértice, alcanzada por el agua en el tiempo t y $r(t)$ es el radio de la sección transversal del cono a la distancia $h(t)$ desde el vértice.



Por semejanza de triángulos deducimos que $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H}$, de donde,

$$r = r(t) = \frac{R}{H}h(t) = \frac{1}{2}h(t)$$

Luego $V(t) = \dfrac{1}{12}\pi h(t)^3$, y $V'(t) = \dfrac{9}{10^3} = \dfrac{\pi}{4}h(t)^2h'(t)$. Luego, cuando $h(t_o) = 6$, deducimos que $\dfrac{9}{10^3} = \dfrac{\pi}{4}36h'(t_o)$, esto es, $h'(t_o) = \dfrac{1}{10^3\pi}$ m/sg $\approxeq 1,146$ m/h.

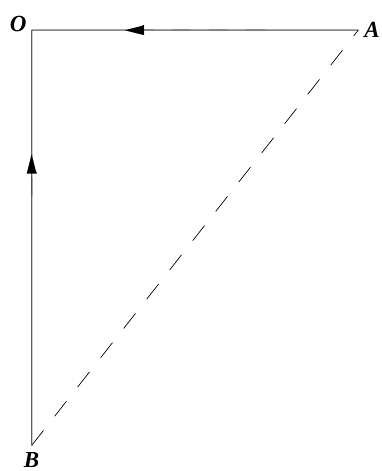
◀

Ejercicio 4.

Sea $V(t)$ el volumen del cubo, medido en centímetros cúbicos, en el tiempo t, medido en minutos. Si $L(t)$ es la longitud en centímetros del lado en el tiempo t, tenemos que $V(t) = L(t)^3$, de donde, $L'(t) = \dfrac{V'(t)}{3L(t)^2}$. Como nos dicen que $V'(t) = 70$ cm/min, deducimos que cuando $L(t_o) = 12$, $L'(t_o) = \dfrac{70}{3(12)^2}$. El área del cubo viene dada por $S(t) = 6L(t)^2$, deducimos que $S'(t_o) = 12L(t_o)L'(t_o) = \dfrac{70}{3}$ cm^2/min.

◀

Ejercicio 5.



Tomamos el punto O como origen de coordenadas, tal como se indica en la figura. Llamemos $x(t)$ a la distancia, medida en millas, que separa el barco A de O. Nos dicen que $x(0) = 15$ y $x'(t) = -20$ millas por hora. Observa que como la función $x(t)$ es decreciente su derivada debe ser negativa. Análogamente, sea $y(t)$ la distancia que separa al barco B de O. Nos dicen que $y(0) = 60$ y $y'(t) = -15$ millas por hora. La distancia entre los dos barcos viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Tenemos

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Cuando ha pasado una hora $x(1) = 15 - 20 = -5$, $y(1) = 60 - 15 = 45$. Deducimos que

$$f'(1) = \frac{(-5)(-20) + 45(-15)}{\sqrt{(-5)^2 + (45)^2}} = -\frac{115}{\sqrt{82}} \text{ millas/h}$$

Donde el sigo negativo indica que se están acercando (la distancia entre ellos está disminuyendo).

Cuando han pasado dos horas $x(2) = 15 - 40 = -25$, $y(2) = 60 - 30 = 30$. Deducimos que

$$f'(2) = \frac{(-25)(-20) + 30(-15)}{\sqrt{(-25)^2 + (30)^2}} = \frac{10}{\sqrt{61}} \text{ millas/h}$$

Donde el sigo positivo indica que se están alejando (la distancia entre ellos está aumentando).

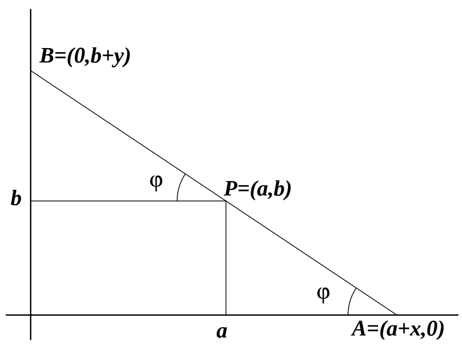
La distancia entre los dos barcos es mínima cuando la derivada es nula (fíjate que la derivada pasa de negativa a positiva). La condición $f'(t_o) = 0$ equivale a $-20x(t_o) - 15y(t_o) = 0$. Sustituyendo en esta igualdad $x(t_o) = 15 - 20t_o$, $y(t_o) = 60 - 15t_o$, obtenemos $t_o = \frac{48}{25}$. $x(\frac{48}{25}) = -\dfrac{117}{5}$, $y(\frac{48}{25}) = \dfrac{156}{5}$. La distancia mínima a que se cruzan los barcos es $f(\frac{48}{25}) = 39$ millas. ◀

Ejercicio 6.
El volumen de la bola en el instante t minutos viene dado por $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi r(t)^3$ centímetros cúbicos. Nos dicen que $V'(t) = -50$. Deducimos que $-50 = 4\pi r(t)^2 r'(t)$. Si $r(t_o) = 15$, se sigue que

$$r'(t_o) = \frac{-50}{4\pi(15)^2} = -\frac{1}{18\pi} \quad \text{cm/min}$$

La derivada es negativa, como debe ser, ya que el radio está disminuyendo. ◀

Ejercicio 7.



En un ejercicio como este *lo primero que hay que hacer es elegir la variable* en función de la cual vamos a calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$. Tomando como variable φ, es decir, la medida en radianes del ángulo indicado en la figura, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por

$$f(\varphi) = \frac{b}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{a}{\cos\varphi} \qquad (0 < \varphi < \pi/2)$$

Debemos calcular el mínimo absoluto de f. Tenemos que:

$$f'(\varphi) = \frac{-b\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Se obtiene enseguida que $f'(\varphi)$ se anula en un único punto $\varphi_o \in]0, \pi/2[$ que viene dado por la condición $\operatorname{tg}(\varphi_o) = \sqrt[3]{b/a}$.

Se justifica fácilmente que f tiene en φ_o un mínimo absoluto. En efecto, como $\lim\limits_{x\to 0} f'(\varphi) = -\infty$, y $\lim\limits_{x\to\pi/2} f'(\varphi) = +\infty$ se sigue que:

$$\varphi \in]0, \varphi_o[\Longrightarrow f'(\varphi) < 0, \quad \varphi \in]\varphi_o, \pi/2[\Longrightarrow f'(\varphi) > 0$$

por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, \varphi_o]$ y estrictamente creciente en $[\varphi_o, \pi/2[$, lo que implica que $f(\varphi_o) \leqslant f(\varphi)$ para todo $\varphi \in]0, \pi/2[$.

Para calcular la longitud mínima $f(\varphi_o)$, basta tener en cuenta que:

$$1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_o) = \frac{1}{\cos^2(\varphi_o)} = 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \Longrightarrow \frac{a}{\cos(\varphi_o)} = a^{2/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2}$$

Fácilmente se obtiene ahora que $\dfrac{b}{\operatorname{sen}(\varphi_o)} = b^{2/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2}$ con lo que la longitud mínima buscada viene dada por:

$$f(\varphi_o) = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ consiste en considerar la ecuación general de las rectas que pasan por el punto $P=(a,b)$: $y=\lambda(x-a)+b$. Las intersecciones de dicha recta con los ejes son los puntos $A=(a-b/\lambda,0)$ y $B=(0,-a\lambda+b)$. Por tanto, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por:

$$g(\lambda)=\sqrt{\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)^2+(b-a\lambda)^2} \qquad (\lambda<0)$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ consiste en introducir las variables x e y tales que $A=(a+x,0)$, $B=(0,b+y)$, como se indica en la figura. La longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por $H(x,y)=\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$. Esta función, aparentemente, depende de dos variables, pero dichas variables *no son independientes*, pues los puntos A, P y B están alineados. Por semejanza de triángulos se obtiene que $x/b=a/y$, por lo que $y=(ab)/x$. En consecuencia, la longitud del segmento $\overline{AB}$ viene dada por: $h(x)=\sqrt{(a+x)^2+(b+(ab)/x)^2} \quad (x>0)$.

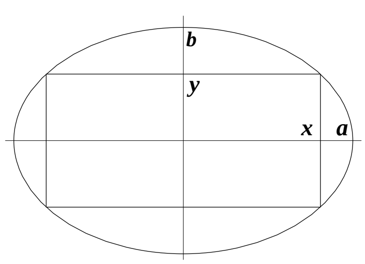
Tanto si se usa la función g como la h, debemos obtener un mínimo absoluto y, como son raíces cuadradas, es suficiente que calculemos el mínimo absoluto de la función radicando (las raíces respetan el orden en $\mathbb{R}_o^+$). Es decir, las funciones g y h alcanzan su mínimo absoluto en el mismo punto en que lo alcanzan las funciones:

$$G(\lambda)=\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)^2+(b-a\lambda)^2 \quad (\lambda<0); \qquad H(x)=(a+x)^2+\left(b+\frac{ab}{x}\right)^2 \quad (x>0)$$

Comprueba que, de cualquier forma que lo hagas, vuelves a obtener la solución anterior. ◀

Ejercicio 8. Llamando P_o el valor del perímetro del rectángulo, y x e y las longitudes de sus lados. Tenemos que $2x+2y=P_o$. El área viene dada por $xy=x(P_o-2x)/2$. Se trata, pues, de hacer máxima la función $f(x)=\frac{1}{2}P_o x-x^2$, donde $0\leqslant x\leqslant P_o$. Derivando $f'(x)=\frac{1}{2}P_o-2x$, por lo que el único cero de la derivada es $x_o=\frac{P_o}{4}$, en cuyo caso $y_o=(P_o-2x_o)/2=x_o$, por lo que el rectángulo es, de hecho, un cuadrado. Es inmediato que el valor obtenido es un máximo absoluto de f en $[0,P_o]$. ◀

Ejercicio 9.



Por razones de simetría, es suficiente determinar el vértice del rectángulo situado en el primer cuadrante. Si las coordenadas de dicho vértice son (x,y), entonces el área del rectángulo será igual a $4xy$. Como el vértice debe estar en la elipse, sus coordenadas x e y deberán satisfacer la igualdad $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

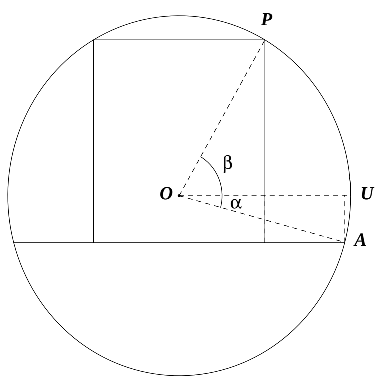
Deducimos que $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Por tanto, se trata de calcular el máximo absoluto en el intervalo $[0,a]$ de la función $f(x)=xb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Como se trata de una función positiva, para calcular el valor en que alcanza su máximo podemos elevarla al cuadrado. En definitiva, nuestro problema es calcular el máximo absoluto de la función

$h(x) = x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ en el intervalo $[0, a]$. Tenemos que $h'(x) = 2x\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) + x^2\dfrac{-2x}{a^2} = 2x - \dfrac{4x^3}{a^2}$, cuyas soluciones son $x = 0$ que corresponde a un mínimo y $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ que corresponde a un máximo absoluto (justificación: la función $h(x)$ se anula en los extremos del intervalo $[0, a]$ y es positiva por lo que su máximo absoluto tiene que alcanzarse en un punto del intervalo abierto $]0, a[$ en el cual debe anularse su derivada. Pero el único punto que cumple estas condiciones es $a/\sqrt{2}$).

El rectángulo pedido es el que tiene de vértices $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$, y su área vale $2ab$. ◀

Ejercicio 10.



Sea ρ el radio del círculo. El punto $A = (\rho\cos\alpha, \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ es conocido. Observa que $-\pi/2 < \alpha \leqslant 0$. Hay que calcular $P = (\rho\cos\beta, \rho\,\mathrm{sen}\,\beta)$ por la condición de que el rectángulo tenga máxima área. La altura, h, del rectángulo viene dada por $h = \rho(\mathrm{sen}\,\beta - \mathrm{sen}\,\alpha)$, y la base, b, por $b = 2\rho\cos\beta$. Debemos calcular el máximo absoluto de $2\rho^2\cos\beta(\mathrm{sen}\,\beta - \mathrm{sen}\,\alpha)$ $\alpha \leqslant \beta \leqslant \pi/2$. Pongamos, por comodidad, $\beta = x$ y prescindamos del factor $2\rho^2$. Sea $f(x) = \cos x(\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,\alpha)$.

Entonces $f'(x) = -\mathrm{sen}\,x(\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,\alpha) + \cos^2 x = -2\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,x + 1$. Haciendo $t = \mathrm{sen}\,x$ tenemos que $f'(x) = 0$ equivale a que $2t^2 - t\,\mathrm{sen}\,\alpha - 1 = 0$. De aquí se obtiene que $t = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{sen}^2\alpha + 8}}{4}$ (la otra raíz no es válida por ser negativa). Deshaciendo los cambios, hemos obtenido que

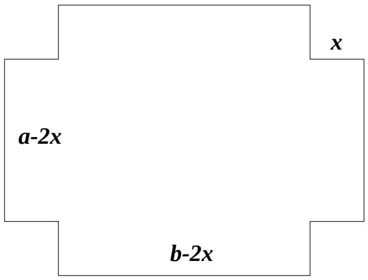
$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{sen}^2\alpha + 8}}{4} \quad \text{de donde} \quad \beta = \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{sen}^2\alpha + 8}}{4}\right)$$

Observa que $\alpha < \beta < \pi/2$. Como $f(\alpha) = f(\pi/2) = 0$, un razonamiento análogo al del ejercicio número 9 justifica que el valor obtenido para β corresponde a un máximo absoluto del área. Ahora, si quieres, puedes calcular dicho valor máximo aunque resulta una expresión complicada en función de α.

Observa que si $\alpha = 0$, entonces $\beta = \mathrm{arc\,sen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, es decir, en este caso el rectángulo es la mitad del cuadrado inscrito en la circunferencia. ◀

Ejercicio 11. Sea r el radio y h la altura medidos en decímetros. Como el volumen es 1 dcm^3, tenemos que $\pi r^2 h = 1$, de donde $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. La superficie total de la lata es $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$. Se trata, por tanto, de calcular el máximo absoluto de $f(r)$ cuando $r > 0$. Derivando, $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = 2\dfrac{2\pi r^3 - 1}{r^2}$. Deducimos que la derivada tiene un único cero real $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$. Como para $0 < r < \alpha$ es $f'(r) < 0$, se sigue que f es decreciente en el intervalo $]0, \alpha]$; y como para $\alpha < r$ es $f'(r) > 0$, se sigue que f es creciente en el intervalo $[\alpha, +\infty[$. En consecuencia $f(\alpha) \leqslant f(r)$ para todo $r > 0$. Así, las dimensiones de la lata con mínima superficie lateral son $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approxeq 0,542\mathrm{dcm}$, y $h \approxeq 1,1\mathrm{dcm}$. ◀

Ejercicio 12.



Sean a y b las longitudes de los lados de la lámina y x la longitud del lado del cuadrado que se cortará en cada esquina. El volumen de la caja resultante es $f(x) = (a-2x)(b-2x)x$. Definamos $\gamma = \min\{a/2, b/2\}$. Se trata de calcular el máximo absoluto de la función f en el intervalo $[0,\gamma]$. Derivando resulta $f'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Los ceros de la derivada son

$$\alpha = \frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}\right), \quad \beta = \frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}\right)$$

Fíjate que, como $a^2+b^2-ab>0$, (esta desigualdad es consecuencia de una vieja amiga nuestra, a saber, $uv \leqslant \frac{1}{2}(u^2+v^2)$) las raíces de f' son *reales*. Observa también que, al ser $f(0) = f(\gamma) = 0$, en virtud del teorema de Rolle, *al menos una de ellas* tiene que estar en el intervalo $]0,\gamma[$. Además, f tiene que alcanzar en un punto de $[0,\gamma]$ un máximo absoluto y como, evidentemente, *dicho punto tiene que estar en* $]0,\gamma[$, deducimos que ese punto o bien es α o es β. El criterio de la derivada segunda nos permite salir de dudas. Tenemos que $f''(x) = -4(a+b-6x)$. Con ello,

$$f''(\alpha) = -4(a+b-6\alpha) = -4\sqrt{a^2+b^2-ab}, \quad f''(\beta) = -4(a+b-6\beta) = 4\sqrt{a^2+b^2-ab}$$

Por tanto, $f(\alpha) < 0$ y $f(\beta) > 0$. Deducimos así que el punto α está en el intervalo $]0,\gamma[$ y en él la función f alcanza su máximo absoluto en $[0,\gamma]$. Con unos sencillos cálculos se obtiene

$$f(\alpha) = \frac{1}{54}(-2a^3+3a^2b+3ab^2-2b^3+2(a^2-ab+b^2)^{3/2})$$

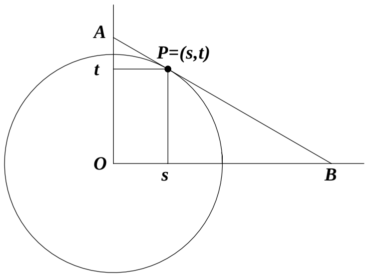
Comentario. Este sencillo ejercicio es bastante instructivo y, a pesar de su apariencia, no es del todo trivial. La dificultad está en que, una vez calculados, α y β no es fácil saber cuál de ellos está en el intervalo $[0,\gamma]$. Incluso, podría sospecharse que una veces esté α, otras β, o que estén los dos o que no esté ninguno. Todo ello, dependiendo de los valores de a y de b. El teorema de Rolle nos dice que al menos uno de los números α, β está en $]0,\gamma[$ (pudieran estar los dos). El criterio de la derivada segunda nos dice que el punto β es un mínimo relativo de f por lo que no puede ser el punto que buscamos. Dicho criterio también nos dice que f alcanza en α un máximo *relativo*. Si a esto le añadimos que, en virtud del teorema de Weierstrass, *sabemos* que f alcanza un máximo absoluto en $[0,\gamma]$, deducimos que es α el punto que buscamos. Como *propina* obtenemos que α está en $]0,\gamma[$ cualesquiera sean a y b.

Alternativamente, puedes estudiar el signo de la primera derivada. Escribiendo $f'(x) = 12(x-\alpha)(x-\beta)$, se sigue que $f'(x) < 0$ si $x \in]\alpha,\beta[$ y $f'(x) > 0$ si $x < \alpha$ o si $x > \beta$. Deducimos que f es creciente en el intervalo $]-\infty,\alpha]$, decreciente en el intervalo $[\alpha,\beta]$ y creciente en $[\beta,+\infty[$. Luego en α hay un máximo relativo. Para justificar que α está en $[0,\gamma]$ y que es el punto donde f alcanza su máximo absoluto en dicho intervalo, hay que razonar como antes. ◄

Ejercicio 13.

Es casi igual que el ejercicio anterior con la salvedad de que ahora la función que hay que minimizar es $f(r) = 8r^2 + 2\pi rh$. ◄

Ejercicio 14.



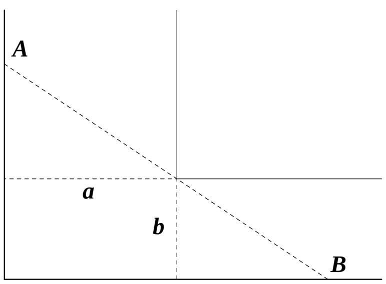
Sean (s,t) las coordenadas de P. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=1$ en P es $xs+yt=1$, cuyos cortes con los ejes son los puntos $A=(0,1/t)$, $B=(1/s,0)$. Por tanto el área del triángulo AOB es igual a

$$\frac{1}{2}\frac{1}{st}=\frac{1}{2}\frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}$$

Para calcular su valor mínimo, como se trata de una función positiva, podemos elevarla al cuadrado para simplificar los cálculos. En definitiva, nuestro problema se reduce a calcular el mínimo de la función $f(s)=\dfrac{1}{s^2(1-s^2)}$ en el intervalo $]0,1[$.

Derivando tenemos $f'(s)=2\dfrac{2s^2-1}{s^3(1-s^2)^2}$. Por tanto el único cero de la derivada en el intervalo $]0,1[$ es $s=1/\sqrt{2}$. Como para $0<s<1/\sqrt{2}$ se tiene que $f'(s)<0$, y para $1/\sqrt{2}<s<1$ es $f'(s)>0$, deducimos que en el punto $1/\sqrt{2}$ hay un mínimo absoluto de f. El punto $P=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ es, por tanto, el que proporciona el triángulo de mínima área. ◀

Ejercicio 15.



Es evidente que *la longitud de la escalera tiene que ser menor o igual que la longitud de cualquier segmento* $\overline{AB}$ como el de la figura. Por tanto, la longitud de la escalera más larga que puede pasar es igual a la longitud mínima del segmento $\overline{AB}$. En consecuencia, la solución de este ejercicio es la misma que la del ejercicio número 7.

◀

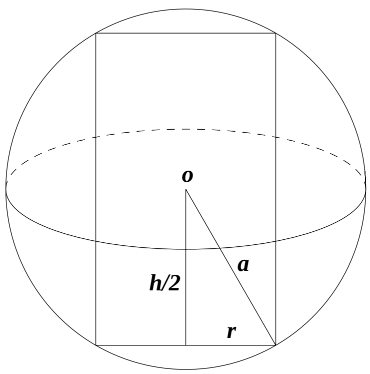
Ejercicio 16.

Este ejercicio es un caso particular del ejercicio número 10. Para hacerlo directamente, sea (x,y) el vértice superior derecho del rectángulo. Entonces, el área es igual a $2xy=2x\sqrt{4-x^2}$, función de la que hay que calcular su máximo absoluto cuando $0\leqslant x\leqslant 2$. Para ahorrarte un poco de trabajo, puedes elevar al cuadrado y calcular el punto en que la función $f(x)=4x^2(4-x^2)$ alcanza su máximo. ◀

Ejercicio 17.

Sea x el lado de la base y h la altura, medidos en metros. Nos dicen que $x^2h=500$, y la función que hay que hacer mínima es $f(x)=x^2+4xh=x^2+\dfrac{2000}{x}$, para $x>0$. Si has llegado hasta aquí, seguro que sabes hacerlo. ◀

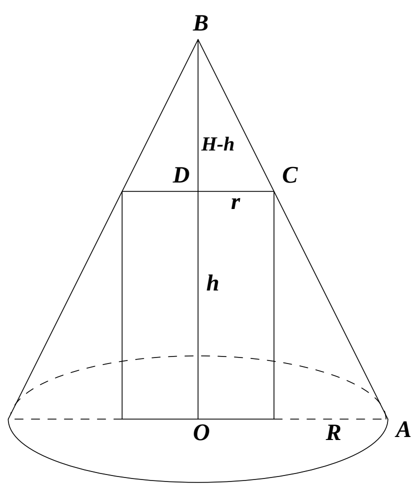
Ejercicio 18.



La relación entre el radio de la esfera a, el radio de la base del cilindro, r, y la altura del cilindro, h, viene dada, como se deduce de la figura, por $a^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$. El volumen del cilindro viene dado por $\pi r^2 h = \pi \frac{4a^2 - h^2}{4} h$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de $f(h) = 4a^2 h - h^3$ en el intervalo $[0, 2a]$. Tenemos que $f'(h) = 4a^2 - 3h^2$. Como la función f es positiva en $]0, 2a[$ y se anula en los extremos del intervalo, deducimos, por un razonamiento ya varias veces repetido, que el único cero que tiene la derivada en el intervalo $]0, 2a[$, es decir, el punto, $\alpha = 2a/\sqrt{3}$, corresponde a un máximo absoluto de f en $[0, 2a]$.

◀

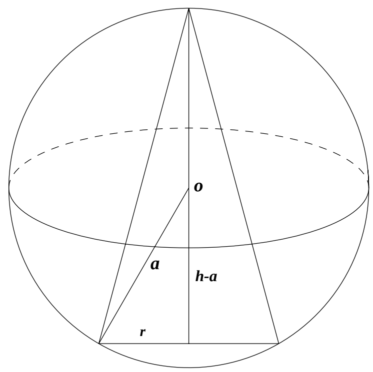
Ejercicio 19.



Sean r y h el radio y la altura del cilindro. Por ser los triángulos OAB y DCB semejantes, tenemos que $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$, de donde, $h = H(1 - r/R)$. El volumen del cilindro viene dado por $\pi r^2 h = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de $f(r) = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ en el intervalo $[0, R]$. Tenemos que $f'(r) = \frac{H\pi r(2R - 3r)}{R}$. De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en el cono dado es el de radio $r = 2R/3$ y altura $h = H/3$; y su volumen es igual a $\frac{4\pi R^2 H}{27}$.

◄

Ejercicio 20.



Sean r y h el radio y la altura del cono. Tenemos que

$$(h-a)^2 + r^2 = a^2$$

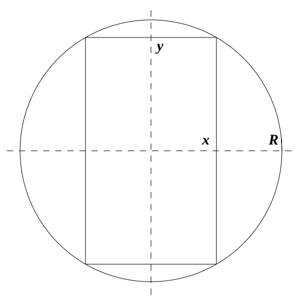
es decir, $r^2 = a^2 - (h-a)^2$. El volumen del cilindro viene dado por $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(a^2-(h-a)^2)h$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(a^2-(h-a)^2)h = \frac{\pi}{3}h^2(2a-h)$$

en el intervalo $[0,2a]$. Tenemos que $f'(h) = \dfrac{\pi}{3}(4a-3h)h$. De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en la esfera dada es el de altura $h = 4a/3$ y radio $r = \dfrac{8a^2}{9}$; y su volumen es igual a $\dfrac{32a^3\pi}{81}$.

◄

Ejercicio 21.



Sean x e y las coordenadas del vértice superior derecho de la viga. Será $x^2+y^2 = R^2$. Nos dicen que la resistencia de la viga viene dada por una función de la forma kxy^2 donde k es una constante. El problema consiste en calcular el máximo absoluto de $f(x) = kx(R^2-x^2)$ en el intervalo $[0,R]$. Tenemos que $f'(x) = k(R^2-3x^2)$. De donde se deduce enseguida que la viga más resistente se obtiene para $x = R/\sqrt{3}$, e $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$.

◄

Ejercicio 22.
La distancia del punto $(6,3)$ a un punto de la parábola (x,x^2) viene dada por $\sqrt{(x-6)^2+(x^2-3)^2}$. Como se trata de una función positiva, calcularemos el punto donde el cuadrado de la distancia alcanza su mínimo absoluto. Sea $f(x) = (x-6)^2+(x^2-3)^2 = 45-12x-5x^2+x^4$. Se trata de calcular el mínimo absoluto de f cuando $x\in\mathbb{R}$. Observa que, en general, una función continua en $\mathbb{R}$ no tiene por qué alcanzar un mínimo absoluto, pero f es una *función polinómica de grado par con coeficiente líder positivo*, por lo que la existencia de un valor mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$ está garantizada de antemano, aunque no vamos a usar este resultado.

Tenemos que $f'(x) = -12-10x+4x^3 = 2(x-2)(3+4x+2x^2)$, que tiene una única raíz real $x = 2$. Como para $x < 2$ se tiene que $f'(x) < 0$ y para $x > 2$ es $f'(x) > 0$, deducimos que en el punto $x = 2$ la función f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. Por tanto, el punto de la parábola $y = x^2$ cuya distancia al punto $(6,3)$ es mínima es el punto $(2,4)$. ◄

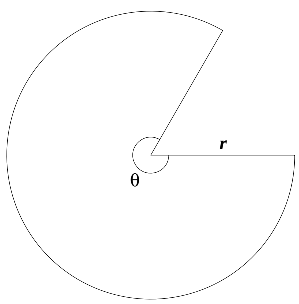
Ejercicio 23.

Todo lo que hay que hacer es calcular la función de beneficio. Sea $80+x$ el precio del alquiler expresado en euros. Como es evidente que no interesa bajar la renta de 80 euros, se considera que $x \geqslant 0$. El beneficio mensual viene dado por

$$f(x)=\left(100-\frac{x}{4}\right)(80+x-8)=7200+82x-\frac{x^2}{4}$$

Tenemos que $f'(x)=82-\dfrac{x}{2}$. Deducimos fácilmente que para $x=164$ obtenemos al máximo beneficio. Es decir, cobrando un alquiler de 244 euros, lo que supone alquilar un total de $100-\dfrac{164}{4}=59$ casas y dejar sin alquilar 41, la empresa obtiene el máximo beneficio $f(164)=13.924$ euros (así es la economía capitalista…) .

Ejercicio 24.

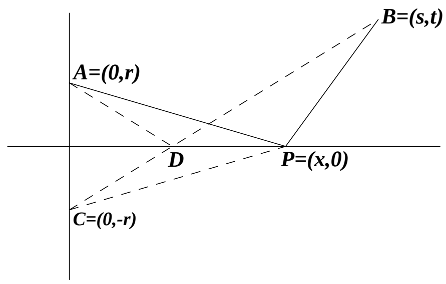


El área de un sector circular de amplitud θ medida en radianes y radio r es igual a $\dfrac{\theta}{2}r^2$, y su longitud viene dada por θr. El perímetro del jardín es igual a $\theta r+2r$. Como debe ser $\dfrac{\theta}{2}r^2=A$, es decir, $\theta=\dfrac{2A}{r^2}$, la función cuyo mínimo absoluto debemos obtener es $f(r)=\dfrac{2A}{r}+2r$, donde $r>0$. Como $f'(r)=-\dfrac{2A}{r^2}+2=2\dfrac{r^2-A}{r^2}$, se deduce fácilmente que en $r=\sqrt{A}$ f alcanza un mínimo absoluto. El valor mínimo del perímetro es igual a $4\sqrt{A}$.

Ejercicio 25.

Supongamos que partimos el alambre en dos trozos de longitud x y $L-x$. Con el trozo de longitud x formamos un cuadrado cuya área será $x^2/16$, con el otro trozo formamos un círculo cuyo radio, r, vendrá dado por $2\pi r=L-x$, y su area será $\pi r^2=\dfrac{(L-x)^2}{4\pi}$. El problema consiste en calcular los puntos donde la función $f(x)=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(L-x)^2}{4\pi}$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[0,L]$. Tenemos que $f'(x)=\dfrac{-4L+(4+\pi)x}{8\pi}$. Deducimos, estudiando el signo de la derivada, que en el punto $x=\dfrac{4L}{4+\pi}$ hay un mínimo absoluto. Como la derivada tiene un único cero en $]0,L[$, deducimos que el máximo absoluto de f en $[0,L]$ tiene que alcanzarse en uno de los extremos y, como $f(L)=0$, concluimos que el valor máximo de f se alcanza para $x=0$ y vale $f(0)=\dfrac{L^2}{4\pi}$.

Ejercicio 26.



Podemos situar los puntos A y B de forma que $A=(0,r)$ y $B=(s,t)$ con r,s,t positivos. La longitud del camino APB viene dada por $f(x)=\sqrt{x^2+r^2}+\sqrt{(s-x)^2+t^2}$. Debemos calcular el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[0,s]$. Tenemos que

$$f'(x)=\frac{x-s}{\sqrt{t^2+(s-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

Resolviendo $f'(x)=0$ obtenemos la solución $\alpha=\dfrac{rs}{r+t}$.

Si haces los cálculos encontrarás que $\dfrac{rs}{r-t}$ es también una *posible* solución, pero $f'\left(\dfrac{rs}{r-t}\right)\neq 0$.

Es inmediato que α está en el intervalo $[0,s]$. Por tanto, los valores candidatos para ser mínimo absoluto de f en $[0,s]$ son $f(0)$, $f(s)$ y $f(\alpha)$. Como $f'(0)<0$ y f' es continua, se sigue que $f'(x)<0$ en un intervalo abierto que contiene a 0. En dicho intervalo abierto la función f es decreciente, por lo que $f(0)$ no puede ser el valor mínimo de f en $[0,s]$. Análogamente, como $f'(s)>0$ y f' es continua, se sigue que $f'(x)>0$ en un intervalo abierto que contiene a s, por lo que $f(s)$ tampoco puede ser el valor mínimo de f en $[0,s]$. Por exclusión, concluimos que $f(\alpha)=\sqrt{s^2+(r+t)^2}$ es el valor mínimo de f en $[0,s]$.

Comentarios. No es del todo inmediato comparar directamente los valores $f(0)$, $f(s)$ y $f(\alpha)$ para ver cuál de ellos es el menor. Para salvar esta dificultad lo más cómodo es razonar como lo hemos hecho.

Alternativamente, puedes calcular la derivada segunda

$$f''(x)=\frac{t^2}{\left(t^2+(s-x)^2\right)^{3/2}}+\frac{r^2}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Como $f''(x)>0$, se sigue que f' es estrictamente creciente. Luego si $x<\alpha$ es $f'(x)<0$, y si $\alpha<x$ es $f'(x)>0$; de donde se deduce que f tiene un mínimo absoluto en α.

En la figura sugiero una elegante y sencilla solución geométrica del problema. El punto D es el que proporciona el camino más corto $\overline{AD}+\overline{DB}$. Cualquier otro camino $\overline{AP}+\overline{PB}$ es más largo porque un lado de un triángulo $\overline{CB}=\overline{CD}+\overline{DB}=\overline{AD}+\overline{DB}$ es siempre más pequeño que la suma de los otros dos $\overline{CP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB}$.

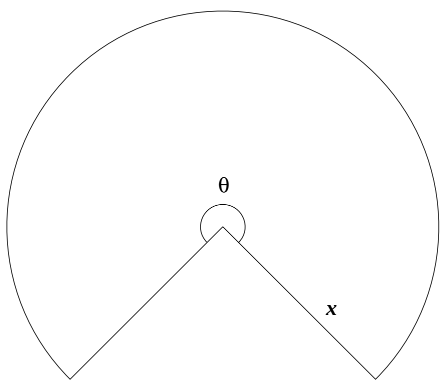
Es interesante advertir que *Mathematica*, al calcular las soluciones de la ecuación $f'(x)=0$, proporciona, además de la solución verdadera, una falsa *solución*. Esto puede ocurrir al usar el comando `"Solve"` cuando en la ecuación hay radicales. ◀

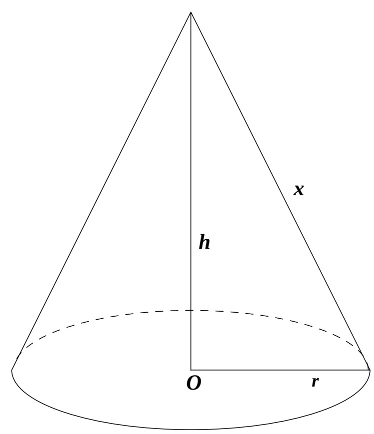
Ejercicio 27. Sea x la longitud de la base de la ventana y h su altura. El perímetro es igual a una cantidad dada, A; es decir, $2x+h+\pi\frac{x}{2}=A$. La luminosidad viene dada por

$$f(x)=2xh+\pi\frac{x^2}{8}=x(A-x-\pi\frac{x}{2})+\pi\frac{x^2}{8}=Ax-\frac{1}{8}(8+3\pi)x^2$$

La derivada $f'(x) = A - \frac{1}{4}(8+3\pi)x$ se anula en $\frac{4A}{8+3\pi}$ y, como $f''(x) = -\frac{1}{4}(8+3\pi) < 0$, concluimos que f alcanza un máximo absoluto en el punto $\frac{4A}{8+3\pi}$. Las dimensiones de la ventana con mayor luminosidad son por tanto $x = \frac{4A}{8+3\pi}$, $h = \frac{4A+4A\pi}{16+6\pi}$. ◀

Ejercicio 28.





Para hacer la tienda necesitamos cortar un sector circular de lona como se indica en la figura. Sea ϑ la medida en radianes del ángulo central del sector y x la medida del radio. La cantidad de lona que necesitamos es igual al área del sector y viene dada por $\frac{\vartheta}{2}x^2$ (si el volumen se expresa en m^3, las demás medidas se expresarán en metros). Sea r el radio de la base de la tienda y h su altura. Nos dicen que el volumen de la tienda debe ser igual a una cantidad prefijada, V, es decir, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Nuestro problema es calcular el mínimo absoluto de $\frac{\vartheta}{2}x^2$ sabiendo que la cantidad $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ es conocida. Veamos que esta condición nos permite expresar x en función de ϑ.

Observa que la longitud de la base de la tienda, $2\pi r$, debe ser igual a la longitud, ϑx, del arco circular que abarca el sector: $\vartheta x = 2\pi r$, de donde, $r = \frac{\vartheta x}{2\pi}$. Además, es evidente que $x^2 = h^2 + r^2$, y deducimos que

$$h^2 = x^2 - r^2 = x^2 - \frac{\vartheta^2 x^2}{4\pi^2} = x^2\left(1 - \frac{\vartheta^2}{4\pi^2}\right) \Longrightarrow h = \frac{x\sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{2\pi}$$

Por tanto

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{\vartheta^2 x^2}{4\pi^2}\frac{x\sqrt{4\pi^2-\vartheta^2}}{2\pi} = \frac{x^3\vartheta^2\sqrt{4\pi^2-\vartheta^2}}{24\pi^2}$$

Despejando x, obtenemos que $x = \frac{2(3\pi^2 V)^{1/3}}{\vartheta^{2/3}(4\pi^2-\vartheta^2)^{1/6}}$. La función de la que tenemos que calcular su mínimo absoluto es

$$f(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2}x^2 = \frac{(9\pi^4 V^2)^{1/3}}{\left(4\pi^2\vartheta - \vartheta^3\right)^{1/3}} \qquad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

Tenemos que $f'(\vartheta) = (9\pi^4 V^2)^{1/3}\frac{3\vartheta^2 - 4\pi^2}{3\left(4\pi^2\vartheta - \vartheta^3\right)^{4/3}}$, que tiene un único cero positivo $\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ que corresponde, como se justifica fácilmente estudiando el signo de la derivada, a un mínimo absoluto de f. El correspondiente valor del radio del sector es $x=\sqrt[6]{\dfrac{3^5V^2}{2\pi^2}}$ y el área, $3\sqrt[6]{\dfrac{3\pi^2V^4}{4}}$.

Para un volumen $V=5\,\mathrm{m}^3$, la cantidad de lona necesaria es $\approxeq 12{,}25\,\mathrm{m}^2$; el radio del sector $x\approxeq 2,6\mathrm{m}$, la altura de la tienda $h\approxeq 2,12\mathrm{m}$ y el radio de la tienda $r\approxeq 1,5\mathrm{m}$. ◀

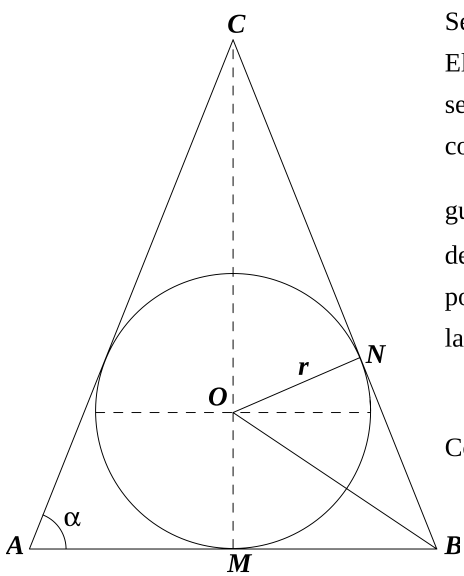
Ejercicio 29.

Sea r el radio de la base y h la altura del cilindro. Nos dicen que el volumen del silo, $\pi r^2h+\dfrac{2}{3}\pi r^3$, es un valor conocido, V, que podemos suponer expresado en m^3. Si el coste de construcción de $1\,\mathrm{m}^2$ de superficie del cilindro es α euros, la función de coste viene dada por $\alpha(2\pi rh)+2\alpha(2\pi r^2)$. De la condición $V=\pi r^2h+\dfrac{2}{3}\pi r^3$, se sigue que $h=-\dfrac{2r}{3}+\dfrac{V}{\pi r^2}$. Sustituyendo este valor en la función de coste, resulta que la función que debemos minimizar es

$$f(r)=\frac{8}{3}\pi r^2\alpha+\frac{2V\alpha}{r}\qquad(r>0)$$

Tenemos $f'(r)=\dfrac{2\alpha(8\pi r^3-3V)}{3r^2}$ que se anula para $r=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$ en donde, como se comprueba fácilmente estudiando el signo de $f'(r)$, la función f alcanza un mínimo absoluto. La altura correspondiente es $h=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi}}$. Para un volumen $V=100\,\mathrm{m}^3$, tenemos $r\approxeq 2,3\,\mathrm{m}$ y $h\approxeq 4,6\,\mathrm{m}$. ◀

Ejercicio 30.



Sea α la medida en radianes de los ángulos $\angle CAB=\angle ABC$. El triángulo $\triangle ONC$ es rectángulo y $\angle CON=\angle ABC$ por ser ángulos con lados perpendiculares. Obtenemos así que $\cos(\alpha)=\dfrac{r}{\overline{OC}}$, esto es, $\overline{OC}=\dfrac{r}{\cos\alpha}$. Considerando el triángulo rectángulo $\triangle OMB$, obtenemos $\operatorname{tg}(\alpha/2)=\dfrac{\overline{OM}}{\overline{MB}}=\dfrac{r}{\overline{MB}}$, de donde $\overline{MB}=r\operatorname{cotg}(\alpha/2)$. El área del triángulo viene dada por $\overline{MB}(\overline{OC}+r)$ y, sustituyendo los valores anteriores, resulta la función

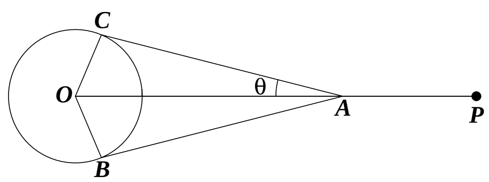
$$f(\alpha)=r^2\operatorname{cotg}(\alpha/2)\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\qquad(0<\alpha<\pi/2)$$

Como

$$f'(\alpha)=r^2\frac{(1-2\cos\alpha)\cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}$$

deducimos que la derivada, $f'(\alpha)$, tiene un único cero que se obtiene cuando $1-2\cos\alpha=0$, lo que implica que $\alpha=\pi/3$. Se comprueba fácilmente, estudiando el signo de la derivada, que dicho valor corresponde a un mínimo absoluto del área del triángulo. Por tanto, de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero; su altura es igual a $\overline{OC}+r=\dfrac{r}{\cos\alpha}+r=2r+r=3r$ y su área vale $3r^2\sqrt{3}$. ◀

Ejercicio 31.



Para hacer este ejercicio debes tener en cuenta que en los puntos donde la cuerda se separa de la columna lo hace en la dirección de la tangente a la circunferencia. En la figura se han representado los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ que unen el centro de la circunferencia con los puntos de tangencia. Lo que nos piden es calcular la longitud máxima del segmento $\overline{OP}$ conociendo la longitud de la cuerda y el radio de la columna. Tenemos que $\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}$, como el triángulo $\triangle OCA$ es rectángulo, se verifica que $\overline{OA}=\dfrac{R}{\operatorname{sen}\vartheta}$, donde ϑ es la medida en radianes del ángulo $\angle OAC$. La longitud del arco de circunferencia desde C hasta B en sentido contrario a las agujas del reloj, es igual a $R(\pi+2\vartheta)$; además se verifica que $\operatorname{tg}\vartheta=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}}=\dfrac{R}{\overline{AC}}$. Deducimos así que

$$\overline{AP}=L-2\overline{AC}-\widehat{CB}=L-2R\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}-R(\pi+2\vartheta)$$

Por tanto

$$f(\vartheta)=\frac{R}{\operatorname{sen}\vartheta}+L-2R\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}-R(\pi+2\vartheta)\qquad 0<\vartheta\leqslant\pi/2$$

es la función que nos da la longitud del segmento $\overline{OP}$. Calculando su derivada y simplificando resulta $f'(\vartheta)=R\dfrac{\cos\vartheta(2\cos\vartheta-1)}{\operatorname{sen}^2\vartheta}$, que se anula solamente cuando $2\cos\vartheta-1=0$, es decir, $\vartheta=\pi/3$. Se comprueba fácilmente, por ejemplo estudiando el signo de $f'(\vartheta)$, que dicho valor corresponde a un máximo absoluto de f en $]0,\pi/2]$. La longitud máxima del segmento $\overline{OP}$ es igual a $f(\pi/3)=L-\dfrac{5\pi R}{3}$.

Comentario. Es claro que la longitud de la cuerda debe ser suficiente para rodear la columna, es decir, $L\geqslant 2\pi R$. Pero observa que si $L=2\pi R$ no podemos separarnos de la columna. Para que el ejercicio *tenga sentido* es necesario que podamos alejarnos más o menos de la columna, dependiendo de la posición del nudo corredizo, y para eso es preciso que $L>2\pi R$.

Fíjate también en que $\lim\limits_{\substack{\vartheta\to 0\\ \vartheta>0}} f(\vartheta)=-\infty$, por lo que $f(\vartheta)$ toma valores negativos cuando ϑ es suficientemente pequeño. Esto nos dice que la función $f(\vartheta)$ no siempre representa la longitud del segmento $\overline{OP}$. De hecho, como $\operatorname{sen}\vartheta=\dfrac{R}{\overline{OA}}$ y, $\overline{OA}\leqslant L-\pi R$, se sigue que $\operatorname{sen}\vartheta\geqslant\dfrac{R}{L-\pi R}$, lo que implica que $\vartheta\geqslant\vartheta_o$ donde $\vartheta_o=\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{R}{L-\pi R}\right)$. Estas consideraciones no afectan a la solución obtenida porque hemos calculado el máximo absoluto de f en *todo* el intervalo $]0,\pi/2]$, salvo por un detalle: debemos asegurarnos de que es posible separar el nudo de la columna hasta que $\vartheta\leqslant\pi/3$. Para eso *es suficiente que la longitud de la cuerda sea mayor o igual* que $R(\pi+2\pi/3)+2R/\sqrt{3}$ (la longitud del arco $\widehat{CB}$ más dos veces la longitud del segmento $\overline{AC}$ correspondientes a $\vartheta=\pi/3$). Observa que $R(\pi+2\pi/3)+2R/\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}R+5\pi R}{3}>2\pi R$. ◄

Ejercicio 32.

En todos estos ejercicios se trata de hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

Paso 1. Hallar todos los puntos x de $[a,b]$ que o bien son puntos singulares de f, es decir, son ceros de f', o son puntos en los que f no es derivable.

Paso 2. Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos en el Paso 1 y también en a y en b.

Paso 3. Comparar los valores obtenidos en el Paso 2. El mayor de todos ello será el máximo absoluto de f en $[a,b]$ y el menor será el mínimo absoluto de f en $[a,b]$.

Naturalmente, este procedimiento es útil cuando se aplica a funciones derivables en todo el intervalo salvo quizás en unos pocos puntos excepcionales. También es necesario que puedan calcularse los ceros de la derivada.

3. La función $f(x)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x+\cos x)+2\operatorname{sen} x-x$, tiene como derivada

$$f'(x)=\cos x\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+2\cos x-1=\frac{1}{2}(-1+2\cos x)(2+\operatorname{sen} x)$$

Por tanto, el único cero de la derivada en el intervalo $[0,\pi/2]$ es $x=\pi/3$. Como para $0\leqslant x<\pi/3$ es $f'(x)>0$ y para $\pi/3<x\leqslant\pi/2$ es $f'(x)<0$, se sigue que el valor máximo absoluto de la función f en $[0,\pi/2]$ se alcanza un en $x=\pi/3$ y vale $f(\pi/3)=\dfrac{5}{8}+\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. El valor mínimo absoluto debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo. Como $f(0)=\dfrac{1}{2}$ y $f(\pi/2)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\pi}{2}$, se sigue que el valor mínimo absoluto de f en $[0,\pi/2]$ se alcanza en $x=0$.

4. La función $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(5-2x)$, tiene como derivada

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{2/3-1}(5-2x)-2x^{2/3}=x^{2/3}\left(\frac{10-4x}{3x}-2\right)=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{10(1-x)}{3x}\qquad x\neq 0$$

Claramente, f no es derivable en $x=0$. El único cero de la derivada es $x=1$, puesto que $f'(x)<0$, para $-1\leqslant x<0$, $f'(x)>0$ para $0<x<1$ y $f'(x)<0$ para $1<x\leqslant 3$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[-1,0]$, estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,3]$. Por tanto $x=0$ es un mínimo relativo y $x=1$ es un máximo relativo. Como $f(-1)=7$, $f(0)=0$, $f(1)=3$ y $f(3)=-\sqrt[3]{9}$, se sigue que, en el intervalo $[-1,3]$, el mínimo absoluto de f se alcanza en el punto $x=3$ y el máximo absoluto se alcanza en $x=-1$. ◀

Ejercicio 33.

Se trata de calcular el mínimo absoluto de la función $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ cuando $x\in\mathbb{R}$. Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos *cuya existencia habrá que justificar*. Tenemos

$$f'(x)=2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)=2nx-2\sum_{k=1}^{n}a_k$$

que se anula solamente en $\bar{x}=(\sum_{k=1}^{n}a_k)/n$. Como $f''(x)=2n>0$, se sigue que $f'(x)$ es creciente y, por tanto, $f'(x)<0$ si $x<\bar{x}$ y $f'(x)>0$ si $x>\bar{x}$. Luego $f(\bar{x})\leqslant f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Es decir, el valor mínimo buscado se obtiene cuando x se sustituye por la media aritmética, $\bar{x}$, de $a_1,a_2,\dots,a_n$. ◀

Ejercicio 34.

Como se trata de una función continua, definida en un intervalo, su imagen tiene que ser un intervalo. Escribamos $f(x) = \exp\left(\dfrac{\log x}{x}\right)$. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2} f(x)$. Es evidente que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. La derivada se anula solamente para $x = \mathrm{e}$, y $f'(x) > 0$ para $0 < x < \mathrm{e}$, $f'(x) < 0$ para $x > \mathrm{e}$. Deducimos que en $x = \mathrm{e}$ la función alcanza un máximo absoluto. Es claro que f no alcanza ningún mínimo absoluto aunque toma valores arbitrariamente próximos a 0, pues como $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\log x}{x} = -\infty$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Concluimos que la imagen de f es el intervalo $]0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$. ◀

Ejercicio 35.

- El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}$ es de la forma $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ cuando $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\to a}|g(x)| = +\infty$. Se trata, por tanto, de una indeterminación del tipo 1^∞. Estos límites suelen poderse calcular haciendo uso del criterio de equivalencia logarítmica que, en las condiciones anteriores para f y g, nos dice que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L &\iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L\\
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 &\iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty\\
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty &\iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty
\end{aligned}$$

En nuestro caso, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\operatorname{sen} x + \cos x - 1) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 1$.

Donde hemos usado que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \cos 0 = 1$$

$$\lim \frac{\cos x - 1}{x} x0 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \operatorname{sen} 0 = 0$$

sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Concluimos así que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\operatorname{sen} x + \cos x - 1) = \mathrm{e}$$

- El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2}$ es del mismo tipo anterior. Ahora, el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{1}{x\cos x}$ no existe, pues $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x\cos x} = +\infty$ y $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x\cos x} = -\infty$. Luego $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2} = +\infty$ y $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2} = 0$.

- El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}$ es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x + x^2/2 - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x + x^2/2}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

- El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$ es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)\frac{1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1-\cos x)}$$

Este último límite no tiene dificultad y puedes hacerlo por L'Hôpital. Como yo no tengo ganas de derivar, voy a aprovechar este límite para presentarte otros dos que debes recordar porque aparecen con frecuencia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ambos resultados son casos particulares del teorema de Taylor-Young o bien, puedes obtenerlos fácilmente por L'Hôpital. Si conoces estos límites, el anterior es inmediato, pues basta escribir:

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

para obtener que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x(1-\cos x)} = \dfrac{-1}{6}2 = \dfrac{-1}{3}$. Luego $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$.

- El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \cos\sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^3 x}$ es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y puede hacerse por L'Hôpital. El problema está en que vamos a tener que derivar por lo menos dos veces y las derivadas de la tangente se van complicando. Para evitarlo podemos sustituir $\operatorname{tg} x$ por x pues

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}{x-0} = 1$$

sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Escribiendo

$$\frac{e^x - \cos\sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^3 x} = \frac{x^3}{\operatorname{tg}^3 x}\frac{e^x - \cos\sqrt{2}x - x}{x^3}$$

y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\operatorname{tg}^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^3 = 1$, basta calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \cos\sqrt{2}x - x}{x^3}$ lo que puedes hacer por L'Hôpital muy fácilmente (aunque es un caso particular del teorema de Taylor-Young).

- El límite $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2}$ es también una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y, en principio, puede hacerse por L'Hôpital.

Las reglas de L'Hôpital son muy útiles, es verdad, pero yo pienso que se abusa de ellas. Las aplicamos sin pensar dos veces lo que hacemos, nos dejamos llevar por la comodidad que proporcionan (aunque no siempre) y acabamos calculando límites de forma mecánica sin saber muy bien qué es lo que hacemos. Por eso, voy a hacer este límite a *mi manera*. Lo primero que voy a hacer es convertir el límite para $x\to\pi/2$ en un límite para $x\to 0$. Para ello basta sustituir x por $\pi/2 - x$ como sigue

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\operatorname{sen}(\pi/2-x))}{(\pi-2(\pi/2-x))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{4x^2}$$

Así está mejor. Ahora, la presencia de x^2 y de $\cos x$ me sugiere escribir $\dfrac{\log(\cos x)}{4x^2} = \dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$. En este producto conozco el límite para $x\to 0$ del segundo factor. Estudiemos el primero. La función $\dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1}$ es de la forma $\dfrac{\log t}{t-1}$ donde se ha sustituido t por $\cos x$. Esto lleva a considerar la función $\varphi(t) = \dfrac{\log t}{t-1}$. Observa que $\lim\limits_{t\to 1}\varphi(t) = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\log t - \log 1}{t-1} = 1$ ¡es la definición de derivada del logaritmo en el punto $t=1$! Por tanto, *definimos* $\varphi(1) = 1$ y de esta forma, φ es continua en $t=1$. Como la función $\cos x$ es continua en todo $x\in\mathbb{R}$, en particular, para $x=0$, y φ es continua en $\cos 0 = 1$, deducimos que la función compuesta $\varphi(\cos x)$ es continua en $x=0$, es decir, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(\cos x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = \varphi(1) = 1$.

Puede que esto te parezca más complicado que aplicar la regla de L'Hôpital sin pensarlo dos veces y es verdad: es más complicado. Pero de esta forma yo entiendo mejor lo que hago. El límite que me piden lo he reducido a otros dos bien conocidos $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\log t}{t-1}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$. Para ello he tenido que hacer algunos ajustes pero eso lo he ido aprendiendo, como todo en matemáticas, con la práctica.

Los restantes límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. Creo que es buena ocasión para darte algunos consejos para calcular límites.

Consejos para calcular límites

Cuando en un ejercicio te piden calcular un límite, es casi seguro que se trata de una *"indeterminación"*. Te recuerdo que aquellos límites de sumas, productos, cocientes o potencias de funciones en los que el resultado no está predeterminado por el comportamiento particular de cada una de las funciones se llaman *"límites indeterminados"*. La palabra *"indeterminado"* quiere decir simplemente que se trata de límites cuyo cálculo no puedes hacerlo aplicando las reglas básicas del *"álgebra de límites"* y tienes que usar alguna técnica apropiada para calcularlos. Los límites *interesantes* son casi siempre de este tipo.

Voy a contarte las estrategias que suelo usar para calcular límites. Esencialmente, puedo resumirlas en dos:

• Trato de reducir el límite a otros bien conocidos.

• Siempre que puedo sustituyo funciones por otras más sencillas.

Vayamos con la primera. Si te preguntas qué entiendo por límites *bien conocidos*, la respuesta es bien fácil: los que siguen a continuación.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{1}{6} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \quad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=\frac{1}{3} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=\frac{-1}{2}$$

Observa que todos ellos, con la excepción de cuatro, son *derivadas* en el punto $x=0$ de las respectivas funciones. Por ello no son difíciles de recordar. Ahora bien, estos límites suelen aparecer algo disfrazados. Realmente, más que como límites concretos, debes considerarlos como *modelos*. Por ejemplo, el límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\cos x-1}$, que hemos estudiado un poco más arriba, no está en la lista anterior, pero responde al modelo $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$ en el que la variable x se ha sustituido por la función $\cos x$ y el punto 1 por el punto 0. Ahora te toca a ti. Elige uno cualquiera de los límites anteriores, por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$. Elige ahora cualquier función *continua* g que se anule en algún punto c, por ejemplo $g(x)=e^x-1$ $(c=0)$ o $g(x)=\log x$ $(c=1)$, o $g(x)=\sqrt[3]{x}-1$ $(c=1)$, ... En todos los casos se verifica que

$$\lim_{x\to c}\frac{\operatorname{tg}(g(x))-g(x)}{g(x)^3}=\frac{1}{3}$$

Tenemos así que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(e^x-1)-e^x+1}{(e^x-1)^3}=\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(\log x)-\log x}{(\log x)^3}=\frac{1}{3}$ etc. ¿Entiendes lo que pasa? Esto puede hacerse con cualquiera de los límites. La justificación de estos resultados es totalmente análoga a la que hicimos para el caso del límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\cos x-1}$ y, esencialmente, es consecuencia de que la composición de funciones continuas es continua. Como consecuencia, los límites de la lista anterior son *muchos más* de los que aparecen en ella. Si te acostumbras a reconocerlos cuando vengan disfrazados podrás ahorrarte mucho trabajo innecesario.

Vamos a la segunda estrategia. Sustituir funciones por otras más sencillas. Esto se basa en la idea siguiente. Supón que estás calculando un límite de la forma $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ y tú conoces otra función $h(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{f(x)} = 1$; entonces puedes sustituir en el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ la función $f(x)$ por $h(x)$ sin que ello afecte para nada al valor del límite.

Cuando $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{f(x)} = 1$, se dice que las funciones f y h son **asintóticamente equivalentes en el punto** a y se escribe $f(x) \sim g(x)\ (x \to a)$. *Para calcular un límite de un* ***producto*** *o de un* ***cociente*** *puedes sustituir cualquiera de los factores por otro asintóticamente equivalente a él.* ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso. La lista de los límites *bien conocidos* es, de hecho, una lista de equivalencias asintóticas y eso la hace más útil todavía.

Si te preguntas qué pasa con las reglas de L'Hôpital, te diré que yo también las uso. No tengo nada en contra de ellas, tan sólo me parece que su uso casi exclusivo y de forma mecánica es empobrecedor. Por el contrario, pienso que cada límite debe intentarse de la forma más adecuada a su caso. Para eso tienes que fijarte en cómo es la función, relacionarla con otras parecidas, tratar de relacionar el límite que te piden con otros bien conocidos, ...

Las estrategias anteriores son las más básicas, pero tengo otras un poco más elaboradas. Esencialmente consisten en aplicar el teorema de Taylor-Young (o, si lo prefieres, el teorema de Taylor con resto infinitesimal, que de las dos formas se llama) para tratar de reducir ciertos límites al límite de un cociente de dos polinomios. Ahora después te pondré algunos ejemplos de esta forma de proceder. Pero, para que puedas usar con comodidad este método, tienes que saberte de memoria, o ser capaz de deducirlos en poco tiempo, los polinomios de Taylor de las funciones elementales. Además, esta forma de proceder se adapta más a unos casos que a otros y tan sólo con la práctica se aprende cuándo conviene usarla. Te recuerdo, para tu comodidad, el fundamento teórico.

Teorema de Taylor-Young (o teorema de Taylor con resto infinitesimal)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1}(a)}{(n+1)!}$$

Donde, como recordarás, notamos por $T_n(f,a)(x)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto a.

Bueno, sorpresa, todos los límites de la lista de *límites bien conocidos* son, sin excepción, casos particulares del resultado anterior.

Te recuerdo también una notación extraordinariamente útil, me refiero a la notación de Landau. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, se escribe $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$ y se lee $f(x)$ *es un infinitésimo de orden superior que* $g(x)$ *en el punto* a . La idea es que $f(x)$ tiene a cero más rápidamente que $g(x)$ cuando $x \to a$. Con esta notación, el teorema de Taylor-Young puede expresarse simplemente por $f(x) - T_n(f,x,a) = o(x-a)^n$ cuando $x \to a$. Lo que suele escribirse $f(x) = T_n(f,x,a) + o(x-a)^n$. Si no hay lugar a confusión, omitimos la precisión *"cuando $x \to a$"*. Lo interesante de esta notación es que si, por ejemplo, $\varphi(x) = o(x-a)^p$ y $\psi(x) = o(x-a)^q$, entonces $\varphi(x)\psi(x) = o(x-a)^{p+q}$ y, si $p > q$, $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = o(x-a)^{p-q}$ y $(\varphi(x)+\psi(x)) = o(x-a)^q$. Además, si $H(x)$ es *una función acotada* en un intervalo abierto que contenga al punto a y sabemos que $\varphi(x) = o(x-a)^p$ entonces también $H(x)\varphi(x) = o(x-a)^p$. Veamos los ejemplos prometidos.

• Si tratas de calcular por L'Hôpital el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x)-x^2}{x^6}$ tendrás que ser paciente porque necesitarás derivar por lo menos cinco veces y en el numerador hay un producto cuyas derivadas se van haciendo cada vez más complicadas. Ahora, si calculas los polinomios de Taylor de orden 5 de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{arc\,tg} x$ en $a=0$, obtendrás que

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6), \quad \operatorname{arc\,tg} x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^6)$$

observa que como se trata de funciones impares sus derivadas de orden par en $x=0$ son nulas, por eso los polinomios anteriores son, de hecho, los polinomios de Taylor de orden 6 y eso explica que aparezca el término $o(x^6)$. Deducimos que $\operatorname{tg} x \operatorname{arc\,tg} x = x^2+\dfrac{2}{9}x^6+o(x^7)$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x)-x^2}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2/9\,x^6+o(x^7)}{x^6}=\frac{2}{9}$$

Observa que aunque $\operatorname{tg} x\sim x$ y $\operatorname{arc\,tg} x\sim x$ para $x\to 0$, se tiene que $\operatorname{tg} x \operatorname{arc\,tg} x - x^2\sim\dfrac{2}{9}x^6$ para $x\to 0$. Fíjate que al calcular el producto

$$\operatorname{tg} x \operatorname{arc\,tg} x = \left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)\right)\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^6)\right)$$

tan sólo nos interesan las potencias de x hasta la de orden 6 inclusive, las demás potencias y los términos de la forma $x\,o(x^6)$, $x^2o(x^6)$, $o(x^6)o(x^6)$, etc. son todos ellos funciones de la forma $o(x^7)$ y su suma también es una función de la forma $o(x^7)$ por lo que no es preciso calcularlos para hacer el límite. Observa que, al proceder de esta manera, tienes que calcular las 5 primeras derivadas en $x=0$ de las funciones $\operatorname{tg}(x)$ y $\operatorname{arc\,tg}(x)$ pero te ahorras el trabajo de derivar su producto. Si aún tienes dudas, calcula el límite por L'Hôpital y compara.

• Otro ejemplo. Se trata de calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)(\log(1+x)-x)-\frac{1}{4}x^4}{x^5}$. Tenemos que

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3), \quad \log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

luego $(\cos x-1)(\log(1+x)-1)=\dfrac{1}{4}x^4+o(x^5)$, de donde se sigue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\log(1+x)-x)-\frac{1}{4}x^4}{x^5}=0$$

◀

Ejercicio 36. Los consejos que te he dado para calcular límites se aplican a límites ordinarios en un punto $a\in\mathbb{R}$. Ahora bien, los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ pueden convertirse en límites por la derecha o por la izquierda en 0 sin más que cambiar x por $1/x$.

Quiero recordarte algunos límites frecuentes en este contexto. Se trata de resultados que debes usar sin necesidad de justificarlos cada vez que los uses. Son los siguientes.

Para todo $r\in\mathbb{R}$ y para todo $s>0$ se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^r}{x^s}=0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{\mathrm{e}^{sx}}=0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^s|\log x|^r=0$$

Te recuerdo también que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ si, y sólo si $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{|f(x)|}=+\infty$.

El límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\operatorname{sen}1/x}{\log x}$ es, de hecho, una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ y puedes intentar hacerlo por L'Hôpital. Prueba a ver qué pasa. En este caso el marqués de L'Hôpital no resuelve el límite. Pero es fácil ver que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}(1/x)\dfrac{x}{\log x}=+\infty$, porque $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}(1/x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\log x}=+\infty$.

El límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$ no entra dentro de ninguna de las indeterminaciones usuales. De hecho, el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sen}\sqrt{x}$ no existe (¿sabes probarlo?). Está claro que el límite que nos piden calcular requiere un tratamiento particular. Después de pensarlo un rato, a la vista de cómo es la función, se me ocurre usar el teorema del valor medio. Dicho teorema, aplicado a la función $\operatorname{sen}\sqrt{x}$ en el intervalo $[x,x+1]$, me dice que hay algún punto $z\in]x,x+1[$ tal que $\operatorname{sen}\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}\sqrt{x}=\dfrac{\cos z}{2\sqrt{z}}$, y tomando valores absolutos deducimos

$$|\operatorname{sen}\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}\sqrt{x}|=\left|\frac{\cos z}{2\sqrt{z}}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)=0$.

El límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}$ es una indeterminación 1^∞ y aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Para ello, calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)-1\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)-1}{\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)^2}\,\frac{\left(\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)^2}{x^2}=\frac{-\pi^2}{2}$$

Luego $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{x+2}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-\pi^2/2}$ ◀

Ejercicio 37.

El límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)^{1/\log x}$ es una indeterminación del tipo 0^0. Sea $f(x)=\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)^{1/\log x}$.

Tomando logaritmos tenemos que $\log f(x)=\dfrac{\log\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)}{\log x}$. Teniendo en cuenta que para $x>0$ es $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$, se sigue que

$$\lim_{x\to+\infty}\log f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}\right)}{-\log\dfrac{1}{x}}=-\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\log(\operatorname{arc\,tg}t)}{\log t}$$

Este último límite puede calcularse por L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\log f(x)=-\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t}{(1+t^2)\operatorname{arc\,tg}t}=-1$$

Deducimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Los demás límites de este ejercicio ya debes de saberlos hacer. ◀

Ejercicio 38.

Las reglas de L'Hôpital dicen que, bajo ciertas hipótesis, la existencia del límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ implica la existencia de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en cuyo caso ambos límites coinciden. Una hipótesis de las reglas de L'Hôpital es que la derivada del denominador no se anule en un intervalo que tenga al punto a por extremo y que el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sea una indeterminación. Esto no ocurre en el caso del cociente $\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$ para $x\to+\infty$ pues, aunque puede verse como una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, la derivada del denominador es $1+\cos x$ que se anula en todos los puntos de la forma $\pi+2k\pi$, $k=1,2,\dots$ por lo que *no tiene sentido* considerar el límite del cociente de las derivadas, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, pues dicho cociente no está definido en ningún intervalo de la forma $]c,+\infty[$. Es claro, sin embargo, que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}=1$$

En el caso del límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}x}$, que puede verse como una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, si formamos el cociente de las derivadas obtenemos la función $\dfrac{2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}$ la cual no tiene límite en 0 (el denominador tiene límite 1, pero el numerador no tiene límite), luego no es posible aplicar L'Hôpital para calcular este límite el cual, por otra parte, es evidentemente igual a 0, pues

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\,x\operatorname{sen}(1/x)=0$$

◀

Ejercicio 39.

a) En virtud del teorema de Taylor-Young, la función polinómica $\varphi(x)$ no puede ser otra que el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ en $x=0$.

b) En virtud del teorema de Taylor-Young, la función polinómica $\varphi(x)$ no puede ser otra que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x)=\log(\operatorname{arc\,tg}(x+1))$ en $x=0$. ◀

Ejercicio 40.

Se trata de un polinomio de grado par con coeficiente líder positivo, por tanto, alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, si éste es igual a m, se tiene que $f(\mathbb{R})=[m,+\infty[$. El punto (o los puntos) en donde f alcanza su mínimo absoluto debe ser un cero de la derivada. Como

$$f'(x)=6x^5-6x=6x(x^4-1)=6x(x^2-1)(x^2+1)=6x(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

se anula en -1, 0 y 1, se sigue que el mínimo absoluto de f debe alcanzarse en alguno de estos puntos y, como $f(1)=f(-1)=0<f(0)$, deducimos que $f(-1)=f(1)=0$ es el mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$. Luego $f(\mathbb{R})=[0,+\infty[$. Hemos determinado así la imagen de f y también hemos encontrado que -1 y 1 son ceros de f (cosa fácil sin más que ver cómo es f). Observa que -1 y 1 son ceros de orden 2 de f (porque son ceros simples de f'). Es claro que f no puede tener más ceros, porque si $f(x_o)=0$ entonces en x_o la función f alcanza un mínimo absoluto y, por tanto, f' debe anularse en x_o. En conclusión, f tiene 4 ceros reales (2 ceros reales dobles). ◀

Ejercicio 41.

Sea $f(x)=3\log x-x$. Observa que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ y $f(\mathrm{e})=3-\mathrm{e}>0$. Deducimos, por el teorema de Bolzano, que f tiene por lo menos un cero en cada intervalo $]0,\mathrm{e}[$ y $]\mathrm{e},+\infty[$. Como la derivada $f'(x)=\dfrac{3}{x}-1$ tiene un único cero en $x=3$, concluimos, por el teorema de Rolle, que f no puede tener más de dos ceros distintos. En conclusión, la ecuación $3\log x-x=0$ tiene una solución en el intervalo $]0,\mathrm{e}[$ y otra en $]\mathrm{e},+\infty[$. Si quieres, puedes precisar más. Como $f(1)<0$ y $f(\mathrm{e}^2)=6-\mathrm{e}^2<0$, se sigue que los dos ceros de f están en el intervalo $]1,\mathrm{e}^2[$. ◀

Ejercicio 42.

Si f es un polinomio de grado n y c es un cero de orden k de f, entonces $f(x)=(x-c)^k h(x)$ donde $h(x)$ es un polinomio de grado $n-k$ con $h(c)\neq 0$. Podemos suponer, por comodidad, que $h(c)>0$. Por la continuidad de h, hay un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todo $x\in I$ se verifica que $h(x)>0$.

- Si k es par, tenemos que $(x-c)^k>0$ para todo $x\neq c$ y deducimos que $f(x)>0$ para todo $x\in I\setminus\{c\}$. Por tanto, la gráfica de f *no atraviesa* al eje de abscisas en $x=c$.

- Si k es impar, tenemos que $(x-c)^k>0$ para $x>c$ y $(x-c)^k<0$ para $x<c$. Deducimos que $f(x)>0$ para $x>c$ y $f(x)<0$ para $x<c$. Por tanto, la gráfica de f *atraviesa* al eje de abscisas en $x=c$.

En otros términos, en un cero de orden par la función f no cambia de signo y en un cero de orden impar sí cambia.

Es claro que si $f(a)f(b)<0$ el número de cambios de signo de f entre a y b tiene que ser impar. Deducimos, por lo antes visto, que f tiene en $]a,b[$ un número impar de ceros de orden impar, por lo que el número total de ceros de f en $]a,b[$, contando cada cero tantas veces como su orden, es impar. Análogamente, si $f(a)f(b)>0$ el número de cambios de signo de f entre a y b tiene que ser par (o ninguno) y deducimos que el número total de ceros de f en $]a,b[$ es par.

Si f tiene n ceros (reales) distintos, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n$, estos ceros determinan $n-1$ intervalos $]\alpha_j,\alpha_{j+1}[$ y, por el teorema de Rolle, en cada uno de esos intervalos la derivada tiene que tener algún cero $c_j\in]\alpha_j,\alpha_{j+1}[$. Deducimos así que la derivada tiene $n-1$ raíces (reales) distintas $c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$. Como en cada intervalo $]\alpha_j,\alpha_{j+1}[$ la gráfica de f atraviesa una vez el eje de abscisas, deducimos que $f(c_j)f(c_{j+1})<0$, es decir, los números $f(c_1),f(c_2),\dots,f(c_{n-1})$ van alternando su signo. Ahora, si $\alpha<\alpha_1$, en el intervalo $]\alpha,c_1[$ la función f tiene un cero simple α_1 y, por tanto, su gráfica atraviesa una vez al eje de abscisas, luego $f(\alpha)f(c_1)<0$. Análogamente, si $\alpha_n<\beta$ debe ser $f(c_{n-1})f(\beta)<0$. Hemos probado así que la condición del enunciado es necesaria.

Recíprocamente, la condición del enunciado implica que f tiene $n+1$ cambios de signo, luego tiene n raíces distintas.

Observa también que, como consecuencia del teorema de Rolle, si la derivada de una función tiene k ceros (reales) distintos entonces la función *no puede tener más de* $k+1$ ceros (reales) distintos (¡pero puede que no tenga ninguno!). Sabemos también, como consecuencia del teorema de los ceros de Bolzano, que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos un cero real, lo que implica que *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado impar tiene un número impar de ceros reales*.

1. Sea $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+\alpha$. Como $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24=12(x+1)(x-1)(x-2)$

y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se sigue, en virtud de lo antes visto, que f tiene 4 raíces reales distintas si, y sólo si, $f(-1) = -19+\alpha < 0$, $f(1) = 13+\alpha > 0$, $f(2) = 8+\alpha < 0$ que equivalen a $-13 < \alpha < -8$.

2. Sea $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - \alpha$. Tenemos que $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^2+2)(x^2-1)$, es decir, f' tiene dos ceros reales por lo que f *no puede tener más de tres* (pero todavía no sabemos si los tiene). Lo que es seguro es que f tiene por lo menos un cero real y en el caso de que tenga más de un cero real debe tener tres (que pueden ser simples o uno simple y otro doble). Veamos cuándo ocurre una cosa u otra. Tenemos que f es inyectiva en los intervalos $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ y $[1,+\infty[$ (porque su derivada no se anula en ningún punto de dichos intervalos excepto en los extremos), además $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Deducimos que para que f tenga tres ceros reales simples, uno en cada intervalo $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ y $]1,+\infty[$, *es necesario y suficiente* que $f(-1) = 22-\alpha > 0$ y $f(1) = -22-\alpha < 0$ lo que ocurre cuando $-22 < \alpha < 22$.

Cuando $\alpha = 22$ entonces $f(-1) = 0$ y $f(1) < 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]1,+\infty[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en -1.

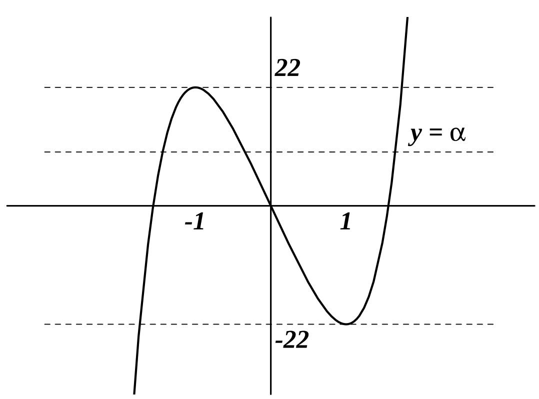
Cuando $\alpha = -22$ entonces $f(-1) > 0$ y $f(1) = 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]-\infty,-1[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en 1.

Cuando $\alpha > 22$ o $\alpha < -22$, f sólo tiene un cero real (porque no puede tener tres ceros reales simples ni tampoco un cero real doble).

La discusión anterior puede hacerse también dibujando la gráfica de la función polinómica $h(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x$ y viendo cuántos cortes tiene dicha gráfica con la recta horizontal $y = \alpha$. Para ello observemos que h y f tienen la misma derivada, por lo que:

$$x < -1 \Longrightarrow h'(x) > 0, \quad -1 < x < 1 \Longrightarrow h'(x) < 0, \quad x > 1 \Longrightarrow h'(x) > 0$$

por lo que h es estrictamente creciente en $]-\infty,-1]$, estrictamente decreciente en $[-1,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty[$. Deducimos que h tiene en -1 un máximo relativo y en 1 un mínimo relativo. Además la derivada segunda $h''(x) = 30x(x^2+1)$ se anula en $x = 0$ siendo $h''(x) < 0$ para $x < 0$ y $h''(x) > 0$ para $x > 0$, es decir, h es cóncava en $]-\infty,0[$ y convexa en $]0,+\infty[$. Con esta información ya podemos dibujar su gráfica.



Nótese que como $f(x) = h(x) + \alpha$, la gráfica de f se obtiene trasladando la de h hacia arriba ($\alpha > 0$) o hacia abajo ($\alpha < 0$). Se ve así claramente, que cuando $\alpha = -22$ o $\alpha = 22$, la gráfica de f *es tangente al eje de abscisas* en el punto -1 o en el 1 donde hay un cero doble.

◀

Ejercicio 43.

Observa que f es un polinomio de grado $2n$ que tiene un cero de orden n en $x=-1$ y otro cero de orden n en $x=1$. La derivada de orden k de f será un polinomio de grado $2n-k$ que tendrá un cero de orden $n-k$ en $x=-1$ y otro cero de orden $n-k$ en $x=1$, luego debe ser de la forma $f^{(k}(x)=(x^2-1)^{n-k}P_k(x)$ donde $P_k(x)$ es un polinomio de grado k. Lo que nos piden es probar que para $1\leqslant k\leqslant n$ el polinomio $P_k(x)$ tiene k raíces reales distintas en el intervalo $]-1,1[$. Lo haremos por inducción (finita). Para $k=1$, $f'(x)=(x^2-1)^{n-1}2nx$ que tiene un cero en $]-1,1[$. Supongamos que $1<k<n-1$ y que $P_k(x)$ tiene k raíces reales distintas, $a_1<a_2<\cdots<a_k$ en el intervalo $]-1,1[$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(k+1}(x) &= (x^2-1)^{n-k-1}2(n-k)xP_k(x)+(x^2-1)^{n-k}{P_k}'(x)\\ &= (x^2-1)^{n-k-1}\big(2(n-k)xP_k(x)+(x^2-1){P_k}'(x)\big)\end{aligned}$$

por tanto, $P_{k+1}(x)=2(n-k)xP_k(x)+(x^2-1){P_k}'(x)$. El polinomio ${P_k}'(x)$ tiene un cero en cada uno de los intervalos $]a_j,a_{j+1}[$ y, como hay en total $k-1$ de ellos, deducimos que ${P_k}'(x)$ tiene $k-1$ ceros simples $c_j\in]a_j,a_{j+1}[$. En cada uno de dichos ceros ${P_k}'(x)$ cambia de signo, es decir, ${P_k}'(a_j){P_k}'(a_{j+1})<0$. Supongamos, por comodidad, que ${P_k}'(a_1)>0$. Entonces $(-1)^j{P_k}'(a_j)>0$ para $1\leqslant j\leqslant k$. Como

$$P_{k+1}(a_j)=2(n-k)a_jP_k(a_j)+({a_j}^2-1){P_k}'(a_j)=({a_j}^2-1){P_k}'(a_j)$$

y ${a_j}^2-1<0$, deducimos que $(-1)^jP_{k+1}(a_j)<0$ para $1\leqslant j\leqslant k$. Por tanto $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz en cada uno de los $k-1$ intervalos $]a_j,a_{j+1}[$.

Probaremos ahora que $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz en $]-1,a_1[$ y otra en $]a_k,1[$. Como $(-1)^jP_{k+1}(a_j)<0$, se sigue que $P_{k+1}(a_1)>0$. Tenemos también que $P_{k+1}(-1)=-2(n-k)P_k(-1)$ por lo que, al ser $n-k>0$, será suficiente probar que $P_k(-1)<0$. Para ello basta observar que como ${P_k}'(x)\neq 0$ para $x<c_1$ y como ${P_k}'(a_1)>0$, se sigue que ${P_k}'(x)>0$ para todo $x<c_1$. Luego $P_k(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $]-\infty,c_1]$ y como se anula en $a_1<c_1$, concluimos que $P_k(x)<0$ para $x<a_1$ y, por tanto, $P_k(-1)<0$. Análogamente se prueba que $P_k(x)$ tiene una raíz en $]a_k,1[$. ◀

Ejercicio 44.

La desigualdad propuesta puede escribirse en la forma $\dfrac{\log\left(x^{-a}\right)}{x^{-a}}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Vemos así que basta probar que $\dfrac{\log t}{t}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ para todo $t>0$. Sea, pues, $f(t)=\dfrac{\log t}{t}$ donde $t>0$. Tenemos que $f'(t)=\dfrac{1-\log t}{t^2}$ y, por tanto, $f'(t)>0$ si $0<t<\mathrm{e}$ por lo que f es creciente en $]0,\mathrm{e}]$ y $f'(t)<0$ si $t>\mathrm{e}$ por lo que f es decreciente en $[\mathrm{e},+\infty[$. Deducimos que f alcanza en $t=\mathrm{e}$ un máximo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Luego $f(t)\leqslant f(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$.

Hemos probado que $\dfrac{\log t}{t}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ para todo $t>0$. Haciendo $t=x^{-a}$, donde $x>0$ y $a\in\mathbb{R}$, deducimos que la desigualdad $-a\,\mathrm{e}\log x\leqslant x^{-a}$ es válida para todo $x>0$, y para todo $a\in\mathbb{R}$. ◀

Ejercicio 45.

Sea $f(x)=\alpha x+1-\alpha-x^{\alpha}$. Es claro que $f(1)=0$, por tanto, todo consiste en probar que la función f alcanza en $x=1$ un mínimo absoluto estricto. Tenemos que $f'(x)=\alpha-\alpha x^{\alpha-1}=\alpha(1-x^{\alpha-1})$. Para $0<x<1$ es $(\alpha-1)\log x>0$ y, por tanto, $x^{\alpha-1}=\exp\big((\alpha-1)\log x\big)>1$, lo que implica, por ser $\alpha>0$, que $f'(x)<0$. Análogamente se justifica que $f'(x)>0$ si $x>1$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty[$. Concluimos así que $f(x)>f(1)=0$ para todo $x>0$, $x\neq 1$. ◀

Ejercicio 46.
La función $\dfrac{\log x}{x}$ ha sido ya estudiada anteriormente. Por otra parte, la desigualdad $a^b < b^a$ es equivalente a $\dfrac{\log a}{a} < \dfrac{\log b}{b}$. ◀

Ejercicio 47.
La desigualdad del enunciado puede escribirse equivalentemente como $\dfrac{\log x}{x} \leqslant \dfrac{\log a}{a}$. ◀

Ejercicio 48.
i) Sea $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Tenemos que $f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$ y $f''(x) = 1 - \cos x$. Como $f''(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$, se sigue que f' es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y, como $f'(0) = 0$, obtenemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$ y por tanto f es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$. Puesto que $f(0) = 0$, concluimos finalmente que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2]$.

ii) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{2x}{\pi}$. Tenemos que $f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x$. Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$, se sigue que f' es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$. Como $f'(0) > 0$, y $f'(\pi/2) < 0$, deducimos que hay un único punto $x_o \in]0, \pi/2[$ tal que $f'(x_o) = 0$ y en dicho punto la función f alcanza un máximo absoluto en $[0, \pi/2]$. Sabemos, por el teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, que f tiene que alcanzar un valor mínimo absoluto en $[0, \pi/2]$. Dicho mínimo absoluto necesariamente tiene que alcanzarse en los extremos del intervalo ya que si se alcanzara en un punto interior en dicho punto habría de anularse la derivada y hemos visto que ésta sólo se anula en un punto que es de máximo absoluto. Como $f(0) = f(\pi/2) = 0$ concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$. ◀

Ejercicio 49.
Podemos derivar $g(x)$ como se deriva un cociente. Tenemos

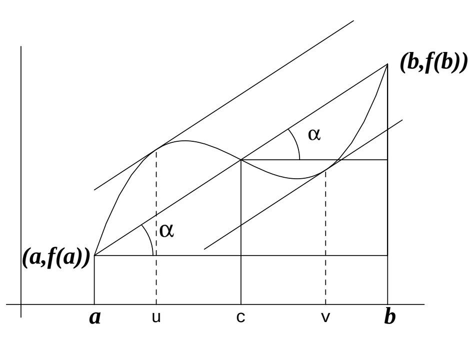
$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2}, \quad (a < x \leqslant b)$$

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a, x]$, tenemos $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$ para algún $c \in]a, x[$. Por tanto

$$f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a)) = (f'(x) - f'(c))(x-a) \geqslant 0$$

por ser f' creciente. Concluimos que $g'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b]$, lo que implica que g es creciente en dicho intervalo. ◀

Ejercicio 50.



Basta aplicar el teorema del valor medio a f en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ para obtener que hay puntos $u \in]a, c[$, $v \in]c, b[$ tales que

$$f'(u) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \quad f'(v) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Como

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \operatorname{tg}(\alpha)$$

se sigue que $f'(u) = f'(v)$.

Aplicamos ahora el teorema de Rolle a f' en $[u,v]$, para concluir que hay algún $z\in]u,v[$ tal que $f''(z)=0$. ◀

Ejercicio 51.

Sea f una función n veces derivables con derivada de orden n constante. Naturalmente, dicha función tiene derivada de orden $n+1$ idénticamente nula. Dado, $x\in\mathbb{R}$, aplicamos el teorema de Taylor con resto de Lagrange a f en el punto $a=0$, y deducimos que existe un punto c comprendido entre 0 y x tal que

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1}(c)}{n!}x^{n+1}$$

y como $f^{(n+1}(t)=0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, concluimos que f coincide con su polinomio de Taylor de orden n en $a=0$ y, por tanto, es una función polinómica de grado $\leqslant n$.

Fíjate que no cabe esperar que este resultado pueda probarse sin usar algún resultado teórico profundo. Recuerda que se necesita el teorema del valor medio para probar que una función con primera derivada nula es constante. ◀

Ejercicio 52.

Si hemos de aceptar la sugerencia, parece conveniente usar un polinomio de Taylor, $T_n(f,a)(x)$, de la función $f(x)=(1-x)^{-1/2}$ en el punto $a=0$, cuyo orden determinaremos por la condición de que el error cometido al aproximar $f(1/50)$ por $T_n(f,0)(1/50)$ sea menor que 10^{-10} pues entonces, al multiplicar por $\frac{14}{10}$, el error de aproximar $\sqrt{2}=\frac{14}{10}f(1/50)$ por $\frac{14}{10}T_n(f,0)(1/50)$ será menor que $\frac{14}{10}10^{-10}<10^{-9}$. La derivada de orden n de $f(x)=(1-x)^{-1/2}$ viene dada por

$$f^{(n}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)(1-x)^{-1/2-n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}(1-x)^{-1/2-n}$$

Sabemos, por el teorema de Taylor con resto de Lagrange, que el error que se comete al aproximar $f(1/50)$ por $T_n(f,0)(1/50)$ es, en valor absoluto, igual a

$$\begin{aligned}\frac{\left|f^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}&=\left[x=\frac{1}{50},\ a=0\right]=\frac{\left|f^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{1}{50}\right)^{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{(n+1)!\,2^{n+1}}\frac{1}{(1-c)^{3/2+n}}\frac{1}{50^{n+1}}\\&=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}\frac{1}{(1-c)^{3/2+n}}\frac{1}{50^{n+1}}<\frac{1}{(1-c)^{3/2+n}}\frac{1}{50^{n+1}}\end{aligned}$$

donde c es un punto comprendido entre $a=0$ y $x=1/50$. Como $0<1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}<1-c$, se sigue que $\frac{1}{(1-c)^{3/2+n}}<\left(\frac{50}{49}\right)^{3/2+n}<\left(\frac{50}{49}\right)^{n+2}$ y, por tanto,

$$\frac{\left|f^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}<\frac{50}{49^{n+2}}$$

Es suficiente para nuestro propósito que $\frac{50}{49^{n+2}}<\frac{1}{10^{10}}$. Como esta desigualdad se satisface para $n=5$, concluimos finalmente que $\left|\sqrt{2}-\frac{14}{10}T_5(f,0)(1/50)\right|<10^{-9}$. Calculemos, para acabar, $T_5(f,0)(1/50)$.

Como $T_5(f,0)(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{5}\dfrac{f^{(k}0}{k!}x^k$ deducimos que

$$\begin{aligned} T_5(f,0)(1/50) &= 1+\sum_{k=1}^{5}\frac{f^{(k}0}{k!}\frac{1}{50^k}=1+\sum_{k=1}^{5}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}\frac{1}{50^k}\\ &= 1+\frac{1}{2}\frac{1}{50}+\frac{3}{8}\frac{1}{50^2}+\frac{5}{16}\frac{1}{50^3}+\frac{35}{128}\frac{1}{50^4}+\frac{63}{256}\frac{1}{50^5}=\frac{80812203563}{8(10^{10})}\end{aligned}$$

Finalmente, $\sqrt{2}\approxeq\dfrac{14}{10}\dfrac{80812203563}{8(10^{10})}=\dfrac{565685424941}{4(10^{11})}=1{,}4142135623525$ con nueve cifras decimales exactas.

Comentario. Me parece que la sugerencia de este ejercicio en vez de simplificar los cálculos los complica. Si calculamos los polinomios de Taylor de $h(x)=\sqrt{x}$ en el punto $a=1{,}96$ todo es más fácil. Naturalmente, he elegido el punto 1.96 porque en él puedo *calcular de forma exacta* el valor de h y de sus derivadas y porque está muy próximo a 2. Tenemos que

$$h^{(n}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^{1/2-n}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2(n-1)-1)}{2^n}x^{1/2-n}$$

El error de aproximación viene ahora dado por

$$\begin{aligned}\frac{\left|h^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} &= [x=1{,}96,\ a=2]=\frac{\left|h^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{4}{10^2}\right)^{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!\,2^{n+1}}\frac{1}{c^{1/2+n}}\frac{4}{10^{2n+2}}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}\frac{1}{c^{1/2+n}}\frac{4}{10^{2n+2}}<\frac{1}{2n+2}\frac{1}{c^{1/2+n}}\frac{4}{10^{2n+2}}\end{aligned}$$

donde $1{,}96<c<2$. Deducimos que

$$\frac{\left|h^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}<\frac{1}{2n+2}\frac{1}{(1{,}4)(1{,}96)^n}\frac{4}{10^{2n+2}}$$

y es suficiente tomar $n=3$ para conseguir que el error sea menor que 10^{-9}. ◀

Ejercicio 53.

a) Elegimos un punto a próximo a $x=7$ en el que podamos calcular de forma exacta el valor de $f(x)=\sqrt[3]{x}$ y de sus derivadas. El punto $a=8$ es un buen candidato, pues está próximo a $x=7$ y $\sqrt[3]{8}=2$. El error que se comete al aproximar $\sqrt[3]{7}$ por el polinomio de Taylor $T_n(f,a)(x)$ viene dado por

$$\frac{\left|f^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}=[a=8,\ x=7]=\frac{\left|f^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}$$

donde $7<c<8$. Como

$$f^{(n}(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)x^{1/3-n}=\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdots(3(n-1)-1)}{3^n}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^n}$$

deducimos que

$$\frac{\left|f^{(n+1}(c)\right|}{(n+1)!}<\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{(n+1)!3^{n+1}}\frac{\sqrt[3]{8}}{7^{n+1}}<\frac{2}{7^{n+1}}$$

y basta tomar $n=2$ para que el error cometido en la aproximación sea menor que 10^{-2}. ◀

Ejercicio 54.

Los polinomios de Taylor de la función exponencial centrados en $a=0$ son inmediatos pues las derivadas de e^x en $x=0$ valen todas 1. Luego

$$T_n(\exp,0)(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k$$

Como $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x)$, se sigue que $\operatorname{sen}^{(n}(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2} + x)$. En particular, $\operatorname{sen}^{(n}(0) = = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$. Por tanto

$$T_n(\operatorname{sen},0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2})}{k!}x^k$$

Como para k par es $\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2}) = 0$ y para k impar $k = 2q-1$ es $\operatorname{sen}(\frac{(2q-1)\pi}{2}) = (-1)^{q+1}$, resulta que

$$T_{2n-1}(\operatorname{sen},0)(x) = T_{2n}(\operatorname{sen},0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

Análogamente para la función coseno

$$T_{2n}(\cos,0)(x) = T_{2n+1}(\cos,0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Pongamos $f(x) = (1+x)^\alpha$. Tenemos que $f^{(n}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Por lo que

$$T_n(f,0)(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

Cualquiera sea el *número real* α y el número natural k se define

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Por convenio $\binom{\alpha}{0} = 1$. Con ello podemos escribir

$$T_n(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Para obtener los polinomios de Taylor de $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y $\operatorname{arc\,sen} x$ es conveniente usar la siguiente relación, de comprobación inmediata, entre los polinomios de Taylor de una función φ y de su derivada φ' que se expresa por

$$\frac{d}{dx}T_{n+1}(\varphi,a)(x) = T_n(\varphi',a)(x) \tag{1}$$

Es decir, la derivada del polinomio de Taylor de orden $n+1$ de φ es el polinomio de Taylor de orden n de φ'. La igualdad (1) es interesante *en los dos sentidos* pues permite calcular $T_{n+1}(\varphi,a)(x)$ sin más que calcular *la primitiva* de $T_n(\varphi',a)(x)$ que en el punto a coincida con $\varphi(a)$. Los siguientes ejemplos son representativos de esta forma de proceder.

En lo que sigue vamos a usar que $T_n(\varphi,a)$ *es el único polinomio de grado* $\leqslant n$ *tal que*

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) - T_n(\varphi,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Pues si $P(x)$ es un polinomio de grado $\leqslant n$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$, entonces, poniendo $H(x) = = T_n(\varphi,a)(x) - P(x)$, tendremos que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{H(x)}{(x-a)^n} = 0$ lo que implica que $x = a$ es una raíz de $H(x)$, luego $H(x) = (x-a)^k Q(x)$, donde k es el orden de la raíz. La condición $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{H(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^k Q(x)}{(x-a)^n} = 0$ implica que $k > n$ y, como $H(x)$ es un polinomio de grado $\leqslant n$ esto sólo es posible si $H(x)$ es idénticamente nulo, es decir, $P(x) = T_n(\varphi,a)(x)$.

Pongamos $f(x) = \log(1+x)$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

De donde se deduce, por lo antes dicho, que

$$T_n(f',0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$$

y, por tanto, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$T_{n+1}(f,0)(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Para el caso de la función $\operatorname{arc\,tg} x$ se procede igual teniendo en cuenta que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

de donde se sigue que

$$T_{2n}(\operatorname{arc\,tg}, 0)(x) = T_{2n+1}(\operatorname{arc\,tg}, 0)(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Finalmente, como $\operatorname{arc\,sen}'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ es de la forma $(1+z)^\alpha$ donde $z = -x^2$, $\alpha = -1/2$, y como el polinomio de Taylor de orden n en $a = 0$ de $(1+z)^\alpha$ sabemos que es $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} z^k$, deducimos que

$$T_{2n}(\operatorname{arc\,sen}', 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k}$$

y, por tanto,

$$T_{2n}(\operatorname{arc\,sen}, 0)(x) = T_{2n+1}(\operatorname{arc\,sen}, 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Como

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)(\frac{-1}{2}-2)\cdots(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$$

tenemos que

$$T_{2n+1}(\operatorname{arc\,sen}, 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

◀

Ejercicio 55.

Por la regla de la cadena, f es derivable en todo punto $x \neq 0$ y, por la regla de derivación de un cociente, tenemos que $f'(x) = \dfrac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$ para $x \neq 0$. Para estudiar si f es derivable en $x = 0$ no hay otra forma de hacerlo (pero lee más abajo) que recurriendo a la definición. Tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g'(0)x}{x^2} = \frac{g''(0)}{2}$$

en virtud del teorema de Taylor-Young (si lo prefieres, puedes aplicar -¡una vez solo!- L'Hôpital). Por tanto, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = \dfrac{g''(0)}{2}$.

Estudiemos si f' es continua en $x = 0$. Tenemos que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$ y para calcular este límite NO se puede aplicar L'Hôpital porque no sabemos si g' es derivable (nos dicen que g es *una* vez derivable en $\mathbb{R}$). Intentaremos relacionar el cociente con las hipótesis que nos dan sobre g. Después de pensarlo un poco, parece conveniente escribir

$$\frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{xg'(x) - xg'(0) + xg'(0) - g(x)}{x^2} = \frac{g'(x) - g'(0)}{x} - \frac{g(x) - g'(0)x}{x^2}$$

y deducimos que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{g''(0)}{2}$, luego f' es continua en $x=0$.

También puedes usar para hacer este ejercicio un resultado de teoría que dice que si una función f es continua en un intervalo I, a es un punto de I, y sabemos que f es derivable en $I\setminus\{a\}$ y que $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = L$, entonces f también es derivable en a con $f'(a) = L$ y, por tanto, f' es continua en a.

Es evidente (¿o no lo es?) que la función f del ejercicio es continua en el intervalo $I=\mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{g''(0)}{2}$, esto prueba de golpe que f es derivable en $x=0$, que $f'(0) = \dfrac{g''(0)}{2}$ y que f' es continua en $x=0$. ◀

Ejercicio 56.

Observa que si $x>-1$ y $x\neq 0$ es $g(x) = (1+x)^{1/x}$ y $g(0) = \mathrm{e}$. Es claro también que $f(x) = \log g(x)$. El ejercicio consiste en calcular las dos primeras derivadas de g en $x=0$. Por la regla de la cadena es suficiente para ello calcular las dos primeras derivadas de f en $x=0$. Pues entonces $g'(x) = \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)$, y $g''(x) = \mathrm{e}^{f(x)}\left((f'(x))^2 + f''(x)\right)$. Fíjate en que la función f es más sencilla que la g. De hecho, no es nada fácil calcular directamente $g'(0)$ porque el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ se complica mucho si tratas de hacerlo por L'Hôpital. Las funciones como la g, esto es, las del tipo $u(x)^{v(x)}$, tienen derivadas muy complicadas.

Derivar f es fácil. El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)-x}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$ es bien conocido. Deducimos que $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$. Ahora, para $x\neq 0$, se calcula fácilmente por la regla de derivación de un cociente, que $f'(x) = \dfrac{x-\log(1+x)-x\log(1+x)}{x^2(1+x)}$. Tenemos

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{x-\log(1+x)-x\log(1+x)+\frac{1}{2}x^2(1+x)}{x^3(1+x)}$$

Se trata de calcular el límite para $x\to 0$ de este cociente. Lo primero es quitar el factor $(1+x)$ del denominador (evidentemente, $(1+x)\sim 1$ para $x\to 0$). Una vez hecho esto, nos damos cuenta de que se trata de comparar $x-\log(1+x)-x\log(1+x)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$ con x^3. Utilizando el teorema de Taylor-Young, tenemos que $\log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$, y deducimos

$$x-\log(1+x)-x\log(1+x)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 = \frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

por lo que el límite buscado es igual a $\dfrac{2}{3}$, es decir, $f''(0) = \dfrac{2}{3}$.

Resulta así que $g'(0) = \mathrm{e}^{f(0)} f'(0) = -\dfrac{e}{2}$, $g''(0) = \mathrm{e}^{f(0)}\left((f'(0))^2+f''(0)\right) = \mathrm{e}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{11}{12}\mathrm{e}$.

Finalmente, el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e+\frac{e}{2}x}{x^2} = \frac{11}{24}\,\mathrm{e}$$

como consecuencia del teorema de Taylor-Young (es de la forma $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)-g'(0)x}{x^2} = \dfrac{1}{2}g''(0)$). ◀

Ejercicio 57.

En todos los casos nos piden estudiar la derivabilidad de una función de la forma $F(x) = u(x)^{v(x)}$ en un punto *"conflictivo"* en el que no puedes aplicar las reglas de derivación. En este tipo de ejercicios la mejor forma de proceder consiste en estudiar la derivabilidad de la función $\varphi(x) = \log F(x) = v(x)\log u(x)$ en el punto conflictivo. Para ello debes recurrir a la definición de derivada. Observa que como $F(x) = \mathrm{e}^{\varphi(x)}$, la derivabilidad de φ equivale a la derivabilidad de F. Como en el ejercicio anterior ya hemos usado esta estrategia un ejemplo más debe ser suficiente para que la comprendas bien.

4. Sea $\varphi(x) = \log f(x) = \dfrac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}$, $\varphi(0) = \log f(0) = \dfrac{-1}{6}$. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)+\dfrac{1}{6}x^2}{x^3} =$$

Podemos aplicar L'Hôpital para quitar el logaritmo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)+\dfrac{1}{3}x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}x^2\operatorname{sen} x}{3x^3\operatorname{sen} x}$$

Sustituimos en el denominador $\operatorname{sen} x$ por x y usando que

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4), \quad \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

deducimos que $x\cos x-\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}x^2\operatorname{sen} x = o(x^4)$, por lo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}x^2\operatorname{sen} x}{3x^3\operatorname{sen} x} = 0$$

Concluimos que φ es derivable en $x=0$ y $\varphi'(0)=0$ por lo que también f es derivable en $x=0$ y $f'(0) = f(0)\varphi'(0) = 0$. ◄

Ejercicio 58.

Consideremos la función $g\colon\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ definida para todo $x>0$ por $g(x) = \mathrm{e}^{-1/x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1/x}}$, y $g(0)=0$.

Te recuerdo que para todo número $r\in\mathbb{R}$ se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{\mathrm{e}^x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^r\,\mathrm{e}^{1/x}} = 0$$

Como $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=0$, la función g es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Para $x>0$ es $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} = \dfrac{1}{x^2\,\mathrm{e}^{1/x}}$, por lo que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x)=0$ y, por un resultado de teoría usado ya en varias ocasiones, concluimos que g es derivable en 0 con $g'(0)=0$ siendo, además, g' continua en 0 y, por tanto, en $\mathbb{R}_o^+$. Como para $x>0$ es $g''(x) = \big(-2x^{-3}+x^{-4}\big)\,\mathrm{e}^{-1/x}$, se sigue que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g''(x)=0$, luego g es dos veces derivable en 0 siendo $g''(0)=0$. De esta forma puedes demostrar por inducción que g tiene derivadas de todos órdenes en $x=0$ siendo $g^{(n}(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Como $f(x)=g(x^2)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, se sigue que también f tiene derivadas de todos órdenes en $x=0$ siendo $f^{(n}(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por tanto, f tiene derivadas de todos órdenes en $\mathbb{R}$, es decir, es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Sabemos que la imagen de f es un intervalo. El mínimo absoluto de f se alcanza en $x=0$. Como $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$ $(x\neq 0)$, se tiene que $f'(x)<0$ si $x<0$ y $f'(x)>0$ si $x>0$. Luego f es estrictamente decreciente en $]-\infty,0]$ y estrictamente creciente en $[0,+\infty[$. Además como $f(-x)=f(x)$, tenemos que $f(\mathbb{R})=f([0,+\infty[)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=[0,1[$. ◀

Ejercicio 59.

$$\frac{fg(x)-fg(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(x)$$

◀

Ejercicio 60.

Se trata de probar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, pues entonces llamando g a la función inversa de f, se tendrá que $f(g(x))=x$, es decir, $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Naturalmente, sería una ingenuidad intentar calcular de forma explícita la función inversa de f, pues la igualdad $x+\mathrm{e}^x=y$ no permite expresar de forma elemental x como función de y. Hemos de contentarnos con demostrar que la función g *existe*.

Desde luego, como $f'(x)=1+\mathrm{e}^x>0$, se sigue que f es inyectiva, de hecho, estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Además como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, se sigue que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$ (porque debe ser un intervalo no minorado ni mayorado). Luego f es una biyección y su función inversa, $g=f^{-1}$ verifica que $g(x)+\mathrm{e}^{g(x)}=x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

En virtud del teorema de la función inversa, sabemos que g es derivable y la relación entre las respectivas derivadas viene dada por $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$. Como $g(1)=0$ (porque $f(0)=1$) y $g(1+\mathrm{e})=1$ (porque $f(1)=1+\mathrm{e}$), deducimos que

$$g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2},\quad g'(1+\mathrm{e})=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1+\mathrm{e}}$$

◀